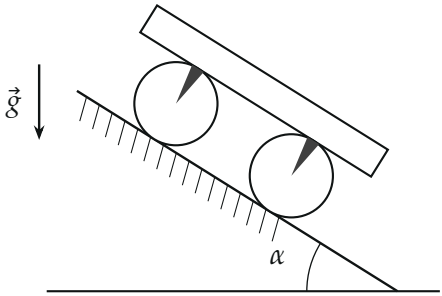
Четырёхколёсная тележка на клине

Задача 2. [Физтех 2025/26, 10 класс, вариант 10-01, задача 2] По шероховатой наклонной плоскости клина, образующей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, скатывается без проскальзывания четырёхколёсная тележка (см. рис.). Масса тележки (включая массу всех колёс) $M = 2$ кг, масса каждого колеса $m = M/10$ однородно распределена по ободу колеса. Клин покоится на горизонтальной плоскости. Масса клина равна массе тележки. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1. Найдите модуль a ускорения тележки.
2. Найдите силу $F_{\text{ТР}}$ трения, действующую на клин со стороны горизонтальной плоскости.
3. При каких величинах коэффициента μ трения скольжения клина по горизонтальной плоскости клин будет находиться в покое?



▲ **Решение. Что происходит.** Колёса катятся без проскальзывания, поэтому часть убыли потенциальной энергии уходит во вращение колёс, и тележка разгоняется слабее, чем при скольжении: ускорение найдём из закона сохранения энергии. Тележку вместе с колёсами будем считать одной системой: её ускорение известно, значит, по второму закону Ньютона известна и полная сила, действующая на неё со стороны клина. По третьему закону Ньютона на клин действует такая же сила, направленная противоположно. Клин покоится, поэтому силы, действующие на него, уравновешены.

Обозначения. a — ускорение тележки (вдоль наклонной плоскости вниз), v — её скорость, R — радиус колеса, $M_{\text{к}} = M$ — масса клина,

$m = M/10 = 0{,}2$ кг; масса тележки без колёс $M - 4m = 1{,}2$ кг. $\vec{R}$ — полная сила реакции клина на тележку, N — нормальная реакция горизонтальной плоскости.

Пункт 1.

1. Кинетическая энергия колеса. При качении без проскальзывания точка касания колеса с плоскостью неподвижна, ось колеса движется со скоростью v тележки, угловая скорость $\omega = v/R$. Масса колеса сосредоточена на ободе, момент инерции $I = mR^2$. Энергия одного колеса (поступательная часть плюс вращательная):

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2}{2}\frac{v^2}{R^2} = mv^2.$$

Кинетическая энергия тележки без колёс — $\dfrac{(M-4m)v^2}{2}$, четырёх колёс — $4mv^2$, всей тележки

$$E_k = \frac{(M-4m)v^2}{2} + 4mv^2 = \frac{(M+4m)v^2}{2}.$$

2. Закон сохранения энергии. Сила трения покоя в точке касания работы не совершает (точка касания неподвижна), клин неподвижен, поэтому механическая энергия тележки сохраняется. Когда тележка прошла по наклонной плоскости путь s из состояния покоя, её центр опустился на $s\sin\alpha$:

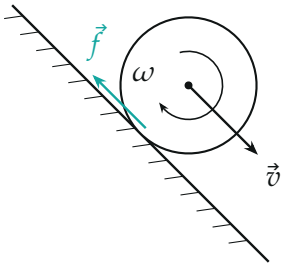
$$Mgs\sin\alpha = \frac{(M+4m)v^2}{2}, \qquad v^2 = 2as.$$

Подставим $v^2 = 2as$ и сократим на s:

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1 + 4m/M} = \frac{10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{1{,}4} \approx 5{,}05\ \text{м/с}^2 \approx 5\ \text{м/с}^2.$$

Проверка вторым способом. Для одного колеса уравнение моментов относительно его оси: $fR = I\varepsilon = mR^2\dfrac{a}{R}$, откуда сила трения на колесо

$f = ma$. Для тележки вдоль наклонной плоскости: $Ma = Mg\sin\alpha - 4f = Mg\sin\alpha - 4ma$ — та же формула. Если $m \to 0$, получаем $a = g\sin\alpha$ (скольжение без трения).



Колесо катится вниз (ось движется со скоростью $\vec{v}$, вращение по часовой стрелке). Сила трения $\vec{f}$ приложена в точке касания и направлена вверх вдоль наклонной плоскости.

Пункт 2.

3. Сила реакции на тележку. На систему «тележка с колёсами» действуют сила тяжести $M\vec{g}$ и сила реакции клина $\vec{R}$ (нормальная реакция плюс трение колёс). Запишем второй закон Ньютона для системы векторно:

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{R}.$$

Выберем ось x горизонтально вправо (в сторону, куда скатывается тележка), ось y вертикально вверх. Ускорение $\vec{a}$ направлено вдоль наклонной плоскости вниз: $a_x = a\cos\alpha$, $a_y = -a\sin\alpha$. В проекциях на горизонталь сила тяжести проекции не даёт:

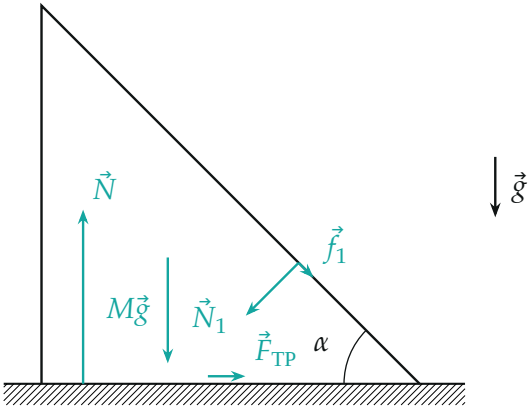
$$R_x = Ma\cos\alpha, \qquad R_y = M(g + a_y) = M(g - a\sin\alpha).$$

4. Силы, действующие на клин. По третьему закону Ньютона тележка действует на клин с силой $-\vec{R}$: влево с горизонтальной составляющей $Ma\cos\alpha$ и вниз с вертикальной $M(g - a\sin\alpha)$. Кроме неё, на клин действуют сила тяжести $M\vec{g}$ (масса клина равна M), нормальная реакция $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ горизонтальной плоскости. Клин покоится, значит, сумма сил равна нулю: по горизонтали — вправо $F_{\text{тр}}$ уравновешивает

$Ma\cos\alpha$, по вертикали — N уравновешивает $Mg + M(g - a\sin\alpha)$:

$$F_{\text{ТР}} = Ma\cos\alpha = 2 \cdot 5{,}05 \cdot 0{,}707 \approx 7{,}1 \text{ Н},$$

$$N = 2Mg - Ma\sin\alpha = 40 - 7{,}1 \approx 32{,}9 \text{ Н}.$$



Силы, действующие на клин: давление тележки $\vec{N}_1$ и трение колёс $\vec{f}_1$ на наклонной плоскости, сила тяжести $M\vec{g}$, реакция $\vec{N}$ и трение $\vec{F}_{ТР}$ горизонтальной плоскости. Длины стрелок — по расчёту.

Обратите внимание. Если считать, что тележка скользит без колёс, то получится $Mg\sin\alpha\cos\alpha = 10$ Н — на 40% больше. И нормальная реакция плоскости меньше $2Mg$: тележка ускоряется вниз, давит на клин слабее.

Пункт 3.

5. Условие покоя клина. Клин не сдвигается, пока сила трения покоя не превосходит предельную μN: $F_{\text{ТР}} \leqslant \mu N$:

$$\mu \geqslant \frac{F_{\text{ТР}}}{N} = \frac{a\cos\alpha}{2g - a\sin\alpha} = \frac{50/7}{230/7} = \frac{5}{23} \approx 0{,}22.$$

Проверка. Силы, с которыми тележка действует на клин, по рисунку: нормальное давление $N_1 = Mg\cos\alpha \approx 14{,}1$ Н и трение колёс $4ma \approx 4{,}0$ Н вдоль наклонной плоскости вниз. Их горизонтальные составляющие: $-N_1\sin\alpha + 4ma\cos\alpha \approx -10{,}0 + 2{,}9 = -7{,}1$ Н — та же сила $F_{\text{ТР}}$ по

модулю. При $m \to 0$ получаем $F_{\text{ТР}} = Mg\sin\alpha\cos\alpha$ — сила, которую даёт тележка, скользящая по клину без вращения колёс.

Ответ. 1) $a = \dfrac{g\sin\alpha}{1+4m/M} \approx 5$ м/с^2; 2) $F_{\text{ТР}} = Ma\cos\alpha \approx 7$ Н; 3) $\mu \geqslant \dfrac{5}{23} \approx 0{,}22$.