Сила между сферой и полусферой

Задача 5. [Физтех 2025/26, 10 класс, вариант 10-01, задача 5] По поверхности непроводящей полусферы радиуса R однородно распределён заряд Q. По поверхности непроводящей сферы радиуса r однородно распределён заряд q. Центр полусферы и центр сферы совпадают (см. рис. 1), $Q, q > 0$.

1. Найдите силу F_1 взаимодействия сферы и полусферы. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона k.

Половину сферы удаляют (см. рис. 2). Центры полусфер и плоскости максимальных сечений полусфер совпадают.

2. Найдите модуль E напряжённости электрического поля в центре полусфер.
3. Найдите силу F_2 взаимодействия полусфер.

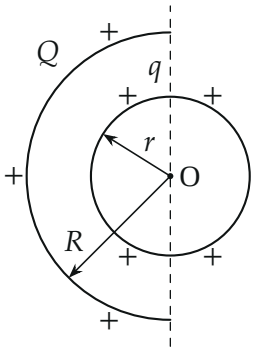


рис. 1

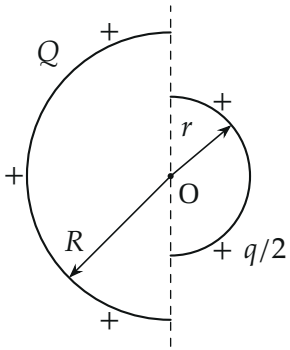


рис. 2

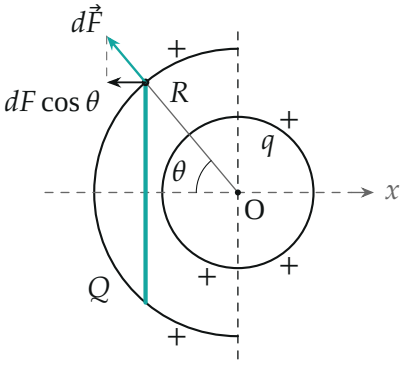
▲ **Решение. Что происходит.** Всё держится на двух свойствах заряженной сферы: внутри неё поля нет, а снаружи оно такое же, как у точечного заряда в центре. Поэтому для полусферы радиуса R сфера радиуса $r < R$ — точечный заряд q в точке O (пункт 1). Поле в центре от каждой полусферы считаем по кольцам одним и тем же интегралом (пункт 2). Силу между полусферами в пункте 3 даёт симметрия: полусферу можно достроить до целой сферы, а внутри целой сферы поля нет.

Обозначения. O — общий центр; ось x идёт по оси симметрии полусферы радиуса R от центра к её открытой стороне; θ — угол между

направлением на точку полусферы из центра и направлением $-x$ (от полюса), $0 \le \theta \le \pi/2$.

Пункт 1.

1. Разобьём полусферу на кольца. Кольцо на угле θ шириной $R\,d\theta$ имеет площадь $dS = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$. Площадь всей полусферы $2\pi R^2$, заряд распределён однородно, поэтому заряд кольца $dQ = Q \sin\theta\, d\theta$.



Кольцо на угле θ (вид с ребра) и сила $d\vec{F}$ на его заряд со стороны сферы r

2. Поле сферы радиуса r. Все точки полусферы лежат на расстоянии $R > r$ от центра, то есть снаружи сферы r, где её поле такое же, как у точечного заряда q в точке O: напряжённость kq/R^2, направлена по радиусу. Значит, на заряд кольца действует радиальная сила

$$dF = \frac{kq\,dQ}{R^2} = \frac{kqQ}{R^2}\sin\theta\, d\theta.$$

3. Сложим силы. Силы на разные точки одного кольца направлены по радиусам, и их составляющие, перпендикулярные оси x, попарно уничтожаются (кольцо симметрично). Остаются составляющие $dF\cos\theta$ вдоль оси. Применим принцип суперпозиции — просуммируем по всем кольцам от полюса ($\theta = 0$) до края ($\theta = \pi/2$):

$$F = \frac{kqQ}{R^2}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{kqQ}{R^2}\cdot\frac{1}{2}.$$

Это сила, действующая на полусферу; по третьему закону Ньютона сфера r действует на неё с такой же по модулю силой, поэтому

$$F_1 = \frac{kqQ}{2R^2}.$$

Силы отталкивательные: сфера r выталкивается к открытой стороне, полусфера — от неё.

Пункт 2.

4. Поле полусферы в центре. Тем же способом: поле кольца в точке O равно $dE = k\,dQ/R^2$ и направлено от кольца вдоль радиуса; суммируются проекции на ось, поэтому

$$E_1 = \frac{kQ}{R^2}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{kQ}{2R^2},$$

направление — вдоль $+x$, к открытой стороне. Тот же результат для полусферы радиуса r с зарядом $q/2$ (после удаления половины на оставшейся поверхности плотность заряда прежняя, значит, заряд $q/2$):

$$E_2 = \frac{k\,(q/2)}{2r^2} = \frac{kq}{4r^2},$$

но эта полусфера лежит по другую сторону от центра, и её поле направлено вдоль $-x$.

5. Результат. Поля противоположны, их надо вычитать:

$$E = |E_1 - E_2| = \left|\frac{kQ}{2R^2} - \frac{kq}{4r^2}\right| = \frac{k}{2}\left|\frac{Q}{R^2} - \frac{q}{2r^2}\right|.$$

Обратите внимание: знак разности зависит от того, какая полусфера «сильнее» (больше Q/R^2 или $q/(2r^2)$), поэтому в ответе — модуль.

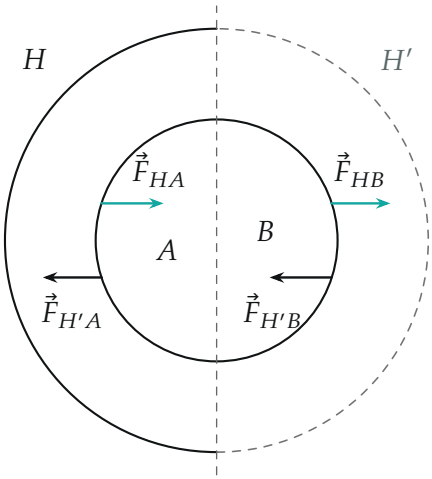
Пункт 3.

6. Идея. Обозначим H — полусферу радиуса R с зарядом Q, A и B — половины сферы радиуса r (по $q/2$), причём A лежит на той же стороне, что H, а B — на другой (рис. 2). Сила F_1 из пункта 1 — это сила H на

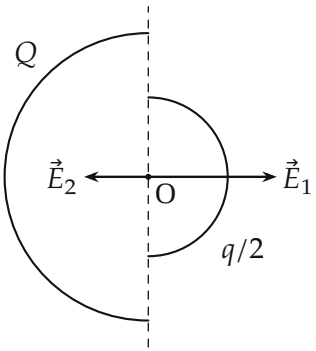
обе половины сразу: $F_{HA} + F_{HB} = F_1$ (все силы вдоль оси). Искомая $F_2 = F_{HB}$.

Достроим H до целой сферы: добавим воображаемую полусферу H' того же радиуса, заряда Q и зеркальную H относительно плоскости сечения. Вместе H и H' — однородно заряженная сфера радиуса R, поля внутри неё нет, поэтому на половину B они действуют с равными по модулю и противоположными силами: $F_{HB} = F_{H'B}$ по модулю. Зеркальное отражение переводит H' в H, а B в A, значит, по модулю $F_{H'B} = F_{HA}$. Значит, $F_{HA} = F_{HB}$, и

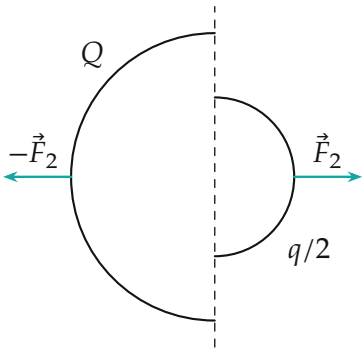
$$F_2 = F_{HB} = \frac{F_1}{2} = \frac{kqQ}{4R^2}.$$



Силы на половины сферы r от H (бирюзовые) и от воображаемой H′ (чёрные): длины стрелок одинаковы



поля в центре



силы взаимодействия

Итог пунктов 2 и 3: поля полусфер в центре направлены противоположно, полусферы отталкиваются

Проверка. Размерность: kqQ/R^2 — Н; kQ/R^2 — В/м. Предел в пункте 2: если полусферы одинаковы ($R = r$, $Q = q/2$), они — половины одной равномерно заряженной сферы, и поле в её центре должно быть нулевым: $\frac{k}{2}\left(\frac{Q}{R^2} - \frac{q}{2r^2}\right) = 0$, как и получается. Второй способ для пункта 1: каждая компонента поля внутри полости гармонична, поэтому среднее по сфере радиуса r равно значению в центре, и сила на равномерно заряженную сферу равна $qE_1 = \frac{kqQ}{2R^2}$ — то же. Численное суммирование по случайным точкам на сферах (python) при $r = R/2$ даёт $F_{HB} \approx 0{,}25\,kqQ/R^2$.

Смысл: сила между полусферами вдвое меньше, чем между целой сферой r и полусферой R, потому что внутри достроенной сферы R на вторую половину сферы r действует то же, что на первую.

Ответ. 1) $F_1 = \frac{kqQ}{2R^2}$; 2) $E = \frac{k}{2}\left|\frac{Q}{R^2} - \frac{q}{2r^2}\right|$; 3) $F_2 = \frac{kqQ}{4R^2}$.