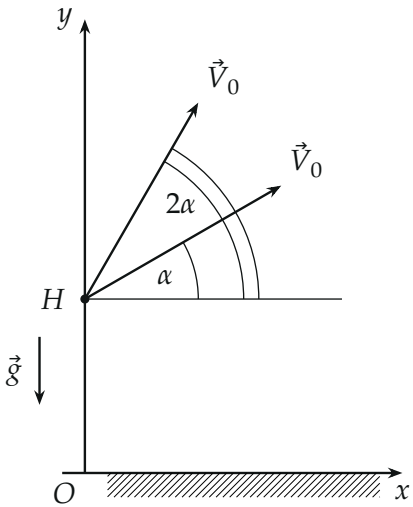
Осколки под углами α и 2α

Задача 1. [Физтех 2025/26, 10 класс, вариант 10-05, задача 1] На высоте H над горизонтальной площадкой фейерверк разрывается на множество осколков, два из которых движутся в одной вертикальной плоскости с одинаковой по модулю начальной скоростью $V_0 = 10$ м/с. Вектор начальной скорости первого осколка образует с горизонтом угол α, вектор начальной скорости второго осколка образует с горизонтом угол 2α (см. рис.). За мгновение до падения первого осколка на горизонтальную площадку векторы скорости осколков параллельны и образуют с вертикалью угол $\varphi = 45°$.

1. Под каким углом α к горизонту стартовал первый осколок? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.
2. На какой высоте H произошёл разрыв фейерверка?
3. Найдите наибольшее расстояние d между осколками в процессе полёта осколков.



▲ **Решение. Что происходит.** Оба осколка летят с одним ускорением $\vec{g}$, поэтому разность их скоростей $\vec{u}$ постоянна и расстояние между осколками растёт линейно: $d(t) = ut$. В момент падения первого осколка скорости параллельны, значит, параллельна им и $\vec{u}$: она направлена под 45°

к вертикали. Это условие даёт угол α; высоту найдём из закона сохранения энергии и горизонтальной проекции скорости.

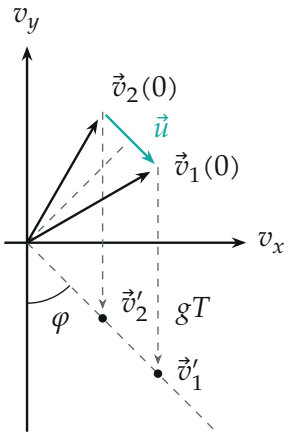
Обозначения. Ось x — горизонтально в сторону полёта, ось y — вверх, начало — на площадке (как на рисунке). T — время полёта первого осколка. Начальные скорости: $\vec{v}_1(0) = V_0(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $\vec{v}_2(0) = V_0(\cos 2\alpha,\ \sin 2\alpha)$.

Пункт 1.

1. Относительная скорость. Из $\vec{v}_i(t) = \vec{v}_i(0) + \vec{g}\,t$ следует, что $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1(0) - \vec{v}_2(0)$ не зависит от времени. Её проекции:

$$u_x = V_0(\cos\alpha - \cos 2\alpha) = 2V_0 \sin\tfrac{\alpha}{2} \sin\tfrac{3\alpha}{2},$$
$$u_y = V_0(\sin\alpha - \sin 2\alpha) = -2V_0 \sin\tfrac{\alpha}{2} \cos\tfrac{3\alpha}{2},$$

то есть $|\vec{u}| = 2V_0 \sin\dfrac{\alpha}{2}$. Геометрически это хорда между концами двух векторов одинаковой длины: она перпендикулярна их биссектрисе, а биссектриса идёт под углом $3\alpha/2$ к горизонту.



Годограф ($\vec{v}'_i = \vec{v}_i(T)$) при $\alpha = 30°$: хорда $\vec{u}$ между концами $\vec{v}_1(0)$ и $\vec{v}_2(0)$ перпендикулярна биссектрисе (серый пунктир из начала до середины хорды) и идёт под $45°$ к вертикали; концы опускаются на gT и остаются на прямой через начало.

2. Угол α. Перед падением первого осколка векторы $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ параллельны, а значит, параллельна им и разность $\vec{u}$: вектор $\vec{u}$ идёт под $\varphi = 45^\circ$ к вертикали, то есть $u_x = -u_y$. Отсюда $\sin\frac{3\alpha}{2} = \cos\frac{3\alpha}{2}$:

$$\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3\alpha}{2} = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30^\circ.$$

Других корней при $0 < \alpha < 90^\circ$ нет.

Пункт 2.

3. Высота разрыва. Для первого осколка выполним закон сохранения механической энергии между разрывом и падением: $\frac{V_1^2}{2} = \frac{V_0^2}{2} + gH$. В момент падения скорость идёт под 45° к вертикали, а горизонтальная проекция не менялась: $V_1 \sin 45^\circ = V_0 \cos\alpha$, то есть $V_1^2 = 2V_0^2\cos^2\alpha$. Подставим:

$$V_0^2\cos^2\alpha = \frac{V_0^2}{2} + gH \quad \Rightarrow \quad H = \frac{V_0^2\cos 2\alpha}{2g} = \frac{100\cdot\frac{1}{2}}{20} = 2{,}5 \text{ м}.$$

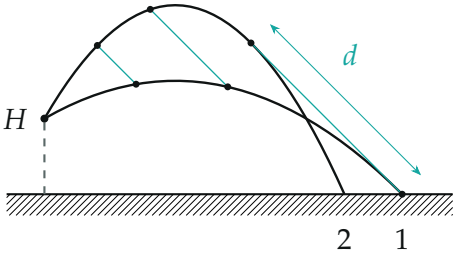
Пункт 3.

4. Время полёта и расстояние. В момент падения вертикальная проекция скорости первого осколка равна $-V_1\cos 45^\circ = -V_0\cos\alpha$:

$$V_0\sin\alpha - gT = -V_0\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad T = \frac{V_0(\sin\alpha + \cos\alpha)}{g} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\text{ с}.$$

Численно $T \approx 1{,}37$ с. Модуль относительной скорости при $\alpha = 30^\circ$: $u = 2V_0\sin 15^\circ \approx 5{,}18$ м/с. До момента T расстояние растёт как $d = ut$. После падения первый осколок лежит на площадке, а второй в этот момент движется по прямой, соединяющей его с первым ($\vec{v}_2(T) \parallel \vec{u}$), и приближается к нему, а затем ещё и разгоняется вниз. Поэтому наибольшее расстояние достигается в момент T:

$$d = uT = 2V_0\sin 15^\circ \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2}\text{ с} = 5\sqrt{2}\text{ м} \approx 7{,}1\text{ м}.$$



Траектории осколков и положения в моменты 0,35 с, 0,7 с и T: отрезки, соединяющие одновременные положения, параллельны друг другу. Номера под площадкой — места падения.

Обратите внимание. Наибольшее расстояние — в момент падения первого осколка, а не второго; после него осколки сближаются.

Проверка. В момент T: первый осколок на площадке в точке $x_1 = V_0 \cos\alpha\, T \approx 11{,}83$ м; второй — $x_2 = V_0 \cos 2\alpha\, T \approx 6{,}83$ м, $y_2 = H + V_0 \sin 2\alpha\, T - gT^2/2 = 5{,}0$ м. Разности координат равны 5,0 м и 5,0 м: $d = 5\sqrt{2} \approx 7{,}1$ м, прямая между осколками идёт под 45° — как и должна по условию. При $\alpha \to 0$ оба осколка летят одинаково и $u \to 0$.

Ответ. 1) $\alpha = 30°$; 2) $H = 2{,}5$ м; 3) $d = 5\sqrt{2} \approx 7{,}1$ м.