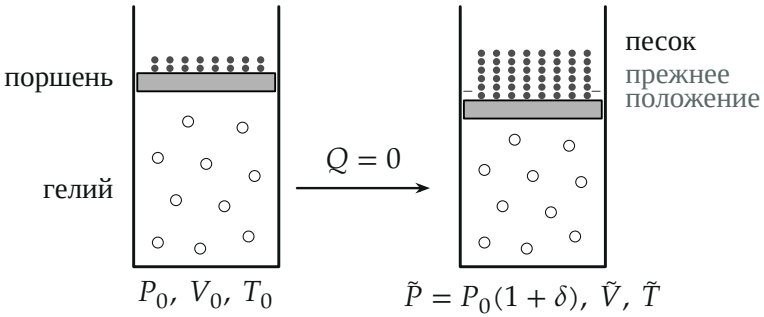
Адиабатное сжатие гелия песком

Задача 3. [Физтех 2025/26, 10 класс, вариант 10-05, задача 3] Гелий находится в вертикальном теплоизолированном цилиндре под теплоизолированным поршнем. Количество вещества $\nu = 1$ моль. На поршень медленно насыпают песок. К тому моменту, когда внешние силы совершили над газом работу $\Delta A = 30$ Дж, давление газа увеличилось на $\delta = 2\%$.

1. Найдите температуру $\tilde{T}$ газа в этот момент. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К). Действие сил трения на поршень пренебрежимо мало.



Поясняющий рисунок: слева начало, справа конец (смещение поршня преувеличено)

▲ **Решение. Что происходит.** Цилиндр и поршень теплоизолированы, поэтому газ не получает и не отдаёт теплоту: процесс адиабатический. Песок насыпают медленно, поэтому в каждый момент давление газа равно давлению сверху. Вся работа внешних сил идёт на увеличение внутренней энергии гелия, и он нагревается. Неизвестных две, T_0 и $\tilde{T}$: закон сохранения энергии даёт одну связь, уравнение адиабаты — вторую.

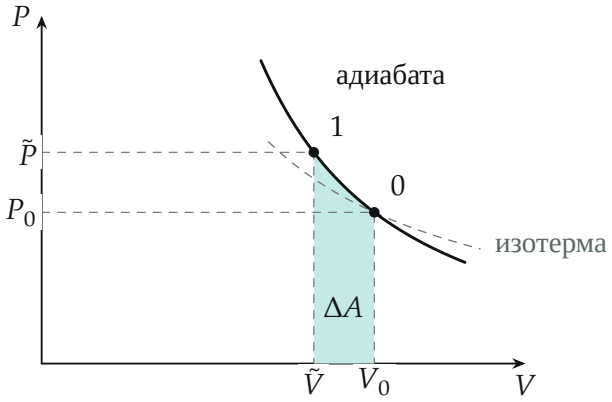
Обозначения. P_0, V_0, T_0 — давление, объём и температура газа в начале; $\tilde{P} = P_0(1+\delta)$, $\tilde{V}$, $\tilde{T}$ — в конце; $\Delta T = \tilde{T} - T_0$. Гелий одноатомный, поэтому внутренняя энергия $U = \dfrac{3}{2}\nu RT$; $\delta = 0{,}02 \ll 1$.

1. Нагрев газа. Запишем первое начало термодинамики для гелия за всё время насыпания песка: приращение внутренней энергии равно работе внешних сил над газом плюс полученная теплота, а теплоты нет.

Поэтому

$$\Delta A = \Delta U = \frac{3}{2}\nu R\,\Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{2\,\Delta A}{3\nu R} = \frac{2\cdot 30}{3\cdot 1\cdot 8{,}31} \approx 2{,}4\ \text{К}.$$

Обратите внимание: ΔA — работа всех внешних сил, действующих на газ через поршень (песок, вес поршня, атмосфера). Газу безразлично, чем его сжимают; важна только работа над ним.



Работа внешних сил над газом — площадь под адиабатой между состояниями 0 и 1 (масштаб преувеличен)

2. Уравнение адиабаты. Рассмотрим малое приращение состояния газа. Теплоты нет, поэтому по первому началу $dU = -P\,dV$. Из уравнения состояния $PV = \nu RT$ внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}PV$, и $dU = \frac{3}{2}(V\,dP + P\,dV)$. Тогда

$$\frac{3}{2}V\,dP + \frac{3}{2}P\,dV = -P\,dV \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{V} = -\frac{3}{5}\frac{dP}{P} \quad \Rightarrow \quad V \propto P^{-3/5}.$$

Подставим в $T = \dfrac{PV}{\nu R}$: при адиабатическом процессе одноатомного газа $T \propto P^{2/5}$, то есть

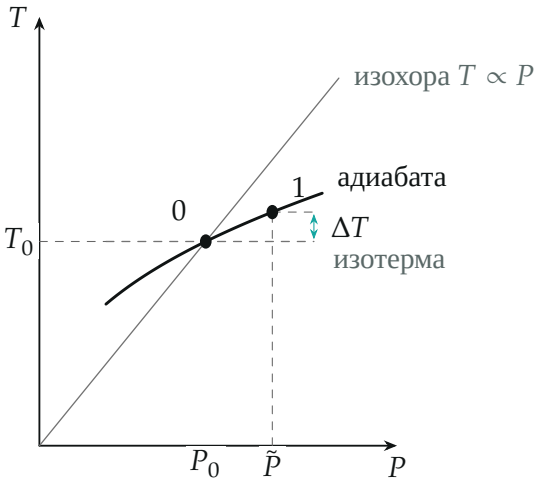
$$\tilde{T} = T_0\,(1+\delta)^{2/5}.$$

3. Начальная и конечная температура. Вычтем T_0 и подставим ΔT из пункта 1:

$$\Delta T = T_0\left[(1+\delta)^{2/5}-1\right] \Rightarrow T_0 = \frac{\Delta T}{(1+\delta)^{2/5}-1} = \frac{2{,}41}{0{,}00795} \approx 302{,}6\ \text{K}.$$

$$\tilde{T} = T_0 + \Delta T \approx 302{,}6 + 2{,}4 \approx 305\ \text{K}.$$

Обратите внимание: T_0 находится делением на малую разность $(1+\delta)^{2/5}-1 \approx 0{,}4\,\delta$, поэтому поправка второго порядка по δ сдвигает ответ на 2 K. Организаторы заменяют эту разность на $0{,}4\,\delta$ и получают 303 K (см. проверку); при $\delta = 2\%$ оба числа совпадают с точностью 0,6%.



При адиабатическом сжатии $T \propto P^{2/5}$: температура растёт медленнее давления (масштаб преувеличен)

Проверка. Размерность: $\Delta A/(\nu R)$ — это Дж/(Дж/К) = К. Второй способ — решение организаторов, линейное по малому δ. Работа внешних сил $dA = -P\,dV = \frac{3}{5}\,V\,dP$; давление выросло всего на 2%, поэтому $V \approx V_0$ и $\Delta P = \delta P_0$:

$$\Delta A \approx \frac{3}{5}\,\delta\,P_0V_0 = \frac{3}{5}\,\delta\,\nu R\,T_0, \quad T_0 \approx \frac{5\,\Delta A}{3\,\delta\,\nu R} \approx 300{,}8\ \text{K}, \quad \tilde{T} \approx 303\ \text{K}.$$

Расхождение с 305 К — 0,6%, порядка $0{,}3\,\delta$, как и должно быть у приближения первого порядка. Предел $\delta \to 0$: обе формулы дают одно и то же.

Смысл: газ сжали без теплообмена, и вся работа сжатия стала его внутренней энергией.

Ответ. 1) $\tilde{T} = \dfrac{2\Delta A}{3\nu R} \cdot \dfrac{(1+\delta)^{2/5}}{(1+\delta)^{2/5} - 1} \approx 305$ К (в линейном по δ приближении организаторов — 303 К).