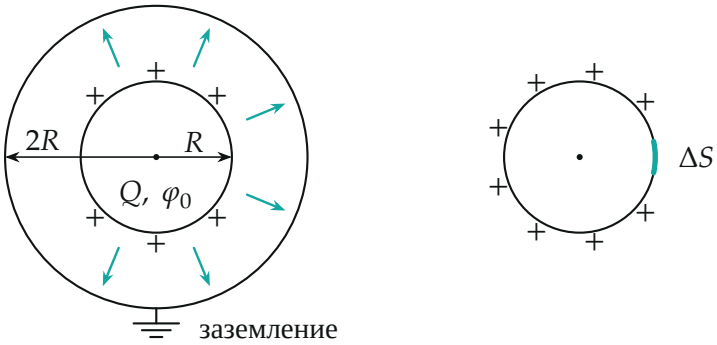
Тонкая заряженная сфера и давление на стенку

Задача 5. [Физтех 2025/26, 10 класс, вариант 10-05, задача 5] Тонкостенная заряженная металлическая сфера радиуса $R = 10$ см с толщиной стенки $d = 0{,}2$ см находится внутри заземлённой проводящей сферы радиуса $2R$. Центры сфер совпадают. Потенциал сферы радиуса R равен $\varphi_0 = 9$ В.

1. Найдите заряд Q сферы радиуса R. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н $\cdot$ м^2/Кл^2.
2. Заземлённую сферу удаляют. Рассмотрим заряд, находящийся на любой элементарной площадке ΔS ($\Delta S \ll R^2$) сферы радиуса R. Выведите формулу для модуля ΔF силы, с которой остальные заряды сферы действуют на заряд рассматриваемой элементарной площадки ΔS.
3. Вычислите модуль F суммы таких сил, действующих на заряды всех элементарных площадок любой половины сферы радиуса R.
4. До какого максимального заряда Q_{MAX} можно зарядить сферу радиуса R, если предельная прочность на разрыв материала, из которого сделана сфера, равна $\sigma_{\text{ПРЕД}} = 2 \cdot 10^9$ Па?



Поясняющий рисунок: слева — сфера в заземлённой оболочке, справа — после её удаления; площадка ΔS отмечена бирюзовым

▲ **Решение. Что происходит.** Пока сфера стоит в заземлённой оболочке, её потенциал связан с зарядом, как у сферического конденсатора. Когда оболочку убрали, заряды сферы отталкиваются друг от друга и тянут стенку наружу: на любую площадку действует сила, направленная

по радиусу, — электростатическое давление. Его даёт поле у самой поверхности. Чтобы сфера разорвалась, суммарная сила, которая стремится отделить одну половину от другой, должна сравняться с наибольшей силой, которую выдерживает стенка по краю разреза.

Обозначения. $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$ — поверхностная плотность заряда; $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi k}$; $\sigma_{\text{ПРЕД}}$ — предел прочности материала (Па), это не плотность заряда.

Пункт 1.

1. Заряд внешней сферы. Заземление держит потенциал внешней сферы равным нулю. На ней индуцируется заряд $Q_{\text{инд}}$; потенциал внешней сферы складывается из потенциалов зарядов Q и $Q_{\text{инд}}$ на расстоянии $2R$ от центра:

$$\frac{kQ}{2R} + \frac{kQ_{\text{инд}}}{2R} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{\text{инд}} = -Q.$$

2. Потенциал внутренней сферы. На поверхности сферы радиуса R потенциал создаётся её зарядом Q (kQ/R) и зарядом внешней сферы: внутри заряженной сферы потенциал постоянен и равен значению на ней, $kQ_{\text{инд}}/(2R)$. Поэтому

$$\varphi_0 = \frac{kQ}{R} - \frac{kQ}{2R} = \frac{kQ}{2R} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{2R\varphi_0}{k} = \frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 9}{9 \cdot 10^9} = 2 \cdot 10^{-10}\ \text{Кл}.$$

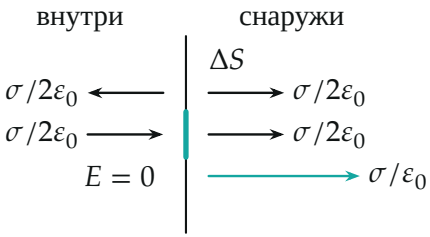
Пункт 2.

3. Поле возле площадки. После удаления оболочки остаётся одна сфера. Малая площадка $\Delta S \ll R^2$ вблизи неё выглядит как участок бесконечной плоскости с плотностью заряда σ. Поле такой плоскости по обе стороны равно $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ и направлено от неё. Кроме площадки, на её окрестность действуют все остальные заряды сферы; обозначим их поле на площадке $E_{\text{ост}}$ — оно не имеет скачка при переходе через площадку, ведь в самой точке заряда у остальных нет. Полное поле известно: у проводящей сферы снаружи $E = \dfrac{kQ}{R^2} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, а внутри стенки и в полости

$E = 0$. Запишем принцип суперпозиции по обе стороны площадки (ось направлена наружу):

$$\text{снаружи: } \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + E_{\text{ост}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad \text{внутри: } -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + E_{\text{ост}} = 0.$$

Оба уравнения дают $E_{\text{ост}} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.



Верхний ряд — поле самой площадки, средний — поле остальных зарядов, нижний — их сумма

4. Сила на площадку. На саму себя площадка не действует; на её заряд $\Delta q = \sigma \Delta S$ действует поле остальных зарядов $E_{\text{ост}}$:

$$\Delta F = \sigma \Delta S \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma^2 \Delta S}{2\varepsilon_0}.$$

Подставим $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$ и $\dfrac{1}{\varepsilon_0} = 4\pi k$:

$$\Delta F = \frac{kQ^2 \Delta S}{8\pi R^4}.$$

Сила направлена по радиусу наружу, на единицу площади она равна $p = \sigma^2/(2\varepsilon_0)$.

Обратите внимание: поле остальных зарядов в два раза меньше полного поля σ/ε_0 у поверхности, потому что вторую половину даёт сама площадка, а на себя она не действует.

Пункт 3.

5. Сумма сил на половину сферы. Силы давления направлены по радиусам; вдоль оси симметрии полусферы остаются их проекции, перпендикулярные составляющие взаимно уничтожаются. Кольцо между углами θ и $\theta + d\theta$ от полюса имеет площадь $dS = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$, поэтому

$$F = \int_0^{\pi/2} p\cos\theta \cdot 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta = p\,\pi R^2 = \frac{kQ^2}{8\pi R^4}\cdot \pi R^2 = \frac{kQ^2}{8R^2}.$$

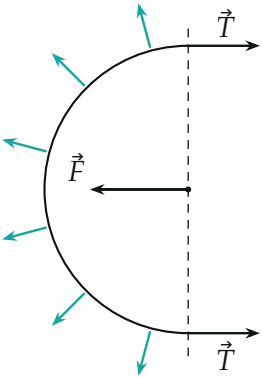
Результат — давление, умноженное на площадь πR^2 большого круга (проекции полусферы на плоскость разреза). Это сила, с которой вторая половина отталкивает первую: внутренние силы между зарядами одной половины попарно уничтожаются.

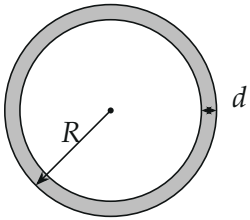
$$F = \frac{9\cdot 10^9 \cdot (2\cdot 10^{-10})^2}{8\cdot 0{,}1^2} = 4{,}5\cdot 10^{-9}\ \text{Н}.$$

Пункт 4.

6. Условие разрыва. Половина сферы удерживается на месте силами упругости стенки по краю разреза. Это кольцо длиной $2\pi R$ и толщиной d с площадью сечения $2\pi R\, d$. При предельной нагрузке стенка выдерживает силу $\sigma_{\text{ПРЕД}} \cdot 2\pi R d$, и она должна уравновесить силу F:

$$\frac{kQ_{\text{MAX}}^2}{8R^2} = \sigma_{\text{ПРЕД}}\cdot 2\pi R\, d, \qquad Q_{\text{MAX}} = \sqrt{\frac{16\pi\,\sigma_{\text{ПРЕД}} R^3 d}{k}} \approx 4{,}7\cdot 10^{-3}\ \text{Кл}.$$





сечение стенки

Слева — силы давления поля, их результирующая $\vec{F}$ и упругие силы $\vec{T}$ стенки по краю разреза; справа — кольцо сечения стенки (толщина d преувеличена)

Проверка. Размерность: $kQ^2\Delta S/R^4$ — Н; $\sigma_{\text{ПРЕД}}R^3d/k$ — Кл^2. Второй способ для пункта 2 — энергия поля: при $Q = \text{const}$ энергия поля вне сферы $W = \dfrac{kQ^2}{2R}$, а сила, растягивающая всю поверхность, $-\dfrac{dW}{dR} = \dfrac{kQ^2}{2R^2}$; на единицу площади $\dfrac{kQ^2}{2R^2 \cdot 4\pi R^2} = \dfrac{kQ^2}{8\pi R^4}$ — то же давление p. Пункт 1 — через ёмкость сферического конденсатора: $C = 8\pi\varepsilon_0 R$, $\varphi_0 = Q/C = \dfrac{kQ}{2R}$. Результат пункта 3 и формула напряжения тонкой сферической оболочки $\sigma_{\text{ст}} = \dfrac{pR}{2d}$ дают то же Q_{MAX}.

Смысл: прочность стенки растёт как d, а давление поля — как Q^2. Найденный заряд в тысячу с лишним раз больше того, при котором в воздухе (около 3 МВ/м) наступит пробой, так что разорвать такую сферу электричеством в воздухе нельзя.

Ответ. 1) $Q = 2 \cdot 10^{-10}$ Кл; 2) $\Delta F = \dfrac{\sigma^2\,\Delta S}{2\varepsilon_0} = \dfrac{kQ^2\,\Delta S}{8\pi R^4}$; 3) $F = \dfrac{kQ^2}{8R^2} \approx 4{,}5 \cdot 10^{-9}$ Н; 4) $Q_{\text{MAX}} \approx 4{,}7 \cdot 10^{-3}$ Кл.