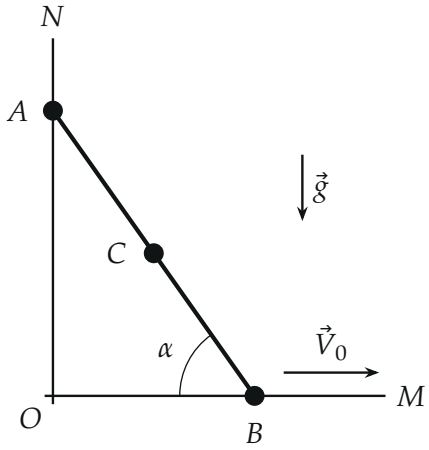
Бусинки на перпендикулярных направляющих

Задача 1. [Физтех 2025/26, 11 класс, варианты 11-01–11-04, задача 1] Небольшие бусинки A и B соединены шарнирно жёсткой спицей AB длиной L и могут двигаться по двум взаимно перпендикулярным направляющим ON и OM, расположенным в вертикальной плоскости (см. рис.). По спице AB может двигаться с трением небольшая бусинка C массой m. Бусинку B двигают так, что модуль скорости бусинки C остаётся постоянным и она не движется по спице, оставаясь в её середине. В некоторый момент скорость бусинки B равна V_0, а $\sin\alpha = \sqrt{6}/3$.

1. Найдите скорость бусинки C.
2. Найдите в этот момент модуль силы трения между спицей и бусинкой C.
3. Найдите в этот момент модуль силы реакции, действующей на бусинку C со стороны спицы.

Известно, что маленький шарик массой m, прикреплённый к нити длиной L и движущийся со скоростью V_0 по окружности радиусом L на гладком горизонтальном столе, растягивает нить с силой $2mg$. В задаче известными считать V_0 и m. Ускорение свободного падения g.



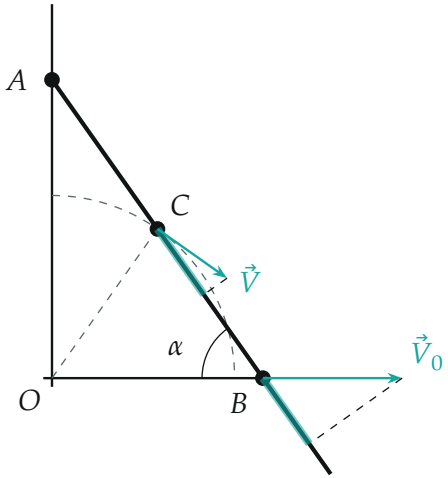
▲ **Решение. Что происходит.** Треугольник AOB прямоугольный, а его медиана OC равна половине гипотенузы: $OC = L/2$ в любой момент.

Бусинка C идёт по окружности радиуса $L/2$ с центром O и постоянной по модулю скоростью, поэтому её ускорение направлено строго к O. Скорость найдём из жёсткости спицы, силы — из второго закона Ньютона для C в проекциях на спицу и на перпендикуляр к ней.

Обозначения. V и a — скорость и ускорение бусинки C, $\alpha = \angle ABO$; орт $\vec{e}$ — вдоль спицы от B к A, $\vec{n}$ — перпендикулярно спице вверх-вправо. Реакция спицы $\vec{F} = \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}$: трение вдоль спицы, $\vec{N}$ — поперёк.

Пункт 1.

1. Направление скорости C. Треугольник OCB равнобедренный ($OC = CB = L/2$), поэтому $\angle COB = \angle CBO = \alpha$, а $\angle OCB = 180^\circ - 2\alpha$. Скорость $\vec{V}$ перпендикулярна радиусу OC, значит, угол между $\vec{V}$ и спицей $\delta = 2\alpha - 90^\circ$ (здесь $\alpha > 45^\circ$).



Скорости B и C и их проекции на спицу (бирюзовые отрезки): $V_0 \cos\alpha = V \sin 2\alpha$.

2. Жёсткость спицы. Расстояние между точками B и C не меняется, поэтому проекции их скоростей на спицу равны:

$$V\cos\delta = V_0\cos\alpha, \qquad \cos\delta = \cos(2\alpha - 90^\circ) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Отсюда

$$V = \frac{V_0}{2\sin\alpha} = \frac{3V_0}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}\,V_0 \approx 0{,}61\,V_0.$$

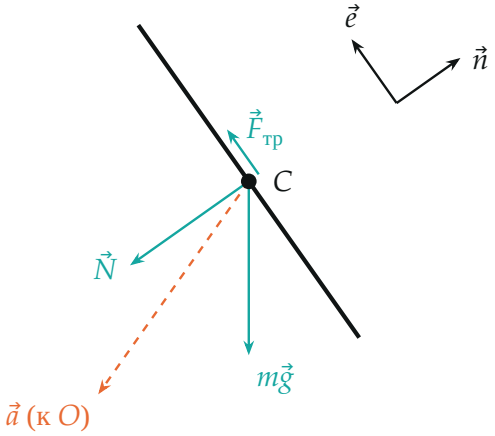
Пункт 2.

3. Ускорение C**.** Модуль скорости постоянен, поэтому касательного ускорения нет, а нормальное направлено к O:

$$a = \frac{V^2}{L/2} = \frac{2V^2}{L} = \frac{2}{L} \cdot \frac{6V_0^2}{16} = \frac{3}{4} \cdot \frac{V_0^2}{L}.$$

Величину V_0^2/L даёт последний абзац условия: для шарика на нити (гладкий стол, горизонтально действует только натяжение) второй закон Ньютона $mV_0^2/L = 2mg$, то есть $V_0^2/L = 2g$. Тогда

$$a = \frac{3}{4} \cdot 2g = \frac{3}{2} g.$$



Силы, действующие на бусинку C (бирюзовые), и её ускорение $\vec{a}$ (морковным пунктиром). Длины стрелок — по расчёту.

4. Второй закон Ньютона вдоль спицы. Запишем его для бусинки C векторно: $m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} = m\vec{a}$. Проекции на ось $\vec{e}$: сила тяжести даёт $-mg\sin\alpha$, сила $\vec{N}$ перпендикулярна спице и проекции не даёт. Вектор $\vec{a}$ направлен от C к O. Отсчитывая углы от оси OM против часовой стрелки, получаем: у $\vec{e}$ угол $180° - \alpha$, у $\vec{a}$ угол $180° + \alpha$ (прямая CO идёт под углом α к горизонту, так как $\angle COB = \alpha$). Угол между ними

равен 2α, поэтому $a_e = a\cos 2\alpha$. При $\sin\alpha = \sqrt{6}/3$ имеем $\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = -\frac{1}{3}$:

$$F_{\text{тр}} - mg\sin\alpha = ma\cos 2\alpha,$$

$$F_{\text{тр}} = mg\,\frac{\sqrt{6}}{3} - m\cdot\frac{3}{2}g\cdot\frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{6}-3}{6}\,mg \approx 0{,}32\,mg.$$

Знак «плюс»: трение направлено вверх вдоль спицы, к A.

Обратите внимание: бусинка не скользит по спице, поэтому $F_{\text{тр}}$ — сила трения покоя, и формула μN неприменима (коэффициент трения не дан). Эту силу находим из второго закона Ньютона.

Пункт 3.

5. Вторая проекция. На ось $\vec{n}$ вклад тяжести равен $-mg\cos\alpha$, проекция ускорения $a_n = a\cos(90^\circ + 2\alpha) = -a\sin 2\alpha$ ($\sin 2\alpha = 2\sqrt{2}/3$; у $\vec{n}$ угол $90^\circ - \alpha$ с осью OM). Для составляющей N_n силы реакции:

$$N_n - mg\cos\alpha = -ma\sin 2\alpha,$$

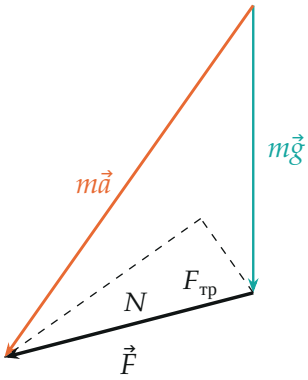
$$N_n = mg\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)mg.$$

Минус: $\vec{N}$ направлена вниз и влево, $N \approx 0{,}84\,mg$.

6. Полная сила реакции — сумма двух перпендикулярных составляющих:

$$F = \sqrt{F_{\text{тр}}^2 + N^2} = \sqrt{\frac{33-12\sqrt{6}}{36} + \frac{28-8\sqrt{6}}{12}}\,mg$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{13-4\sqrt{6}}\,mg \approx 0{,}89\,mg.$$



Силы складываются в $m\vec{a}$: $\vec{F} = m\vec{a} - m\vec{g}$.

Тот же модуль даёт теорема косинусов для треугольника $m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}$: угол между $\vec{g}$ и $\vec{a}$ равен $90^\circ - \alpha$, его косинус $\sin\alpha = \sqrt{6}/3$:

$$F^2 = (mg)^2 + (ma)^2 - 2\,mg \cdot ma \sin\alpha = \frac{13 - 4\sqrt{6}}{4}\,(mg)^2.$$

Проверка. Предел: при $\alpha \to 90^\circ$ спица вертикальна, A неподвижна, B у точки O едет со скоростью V_0, середина C — вдвое медленнее: формула даёт $V = V_0/2$. Второй способ для скорости: $x_B = L\cos\alpha$, поэтому $V_0 = L\omega\sin\alpha$, где $\omega = |\dot{\alpha}|$, и $V = \omega L/2 = V_0/(2\sin\alpha)$. Модуль F двумя способами совпал; размерность ответов — сила. Смысл: ускорение $1{,}5g$ создаёт главным образом нормальная составляющая $N \approx 0{,}84\,mg$, трение — малая добавка.

Ответ. 1) $V_C = \dfrac{\sqrt{6}}{4}V_0$; 2) $F_{\text{тр}} = \dfrac{2\sqrt{6} - 3}{6}\,mg$; 3) $F = \dfrac{1}{2}\sqrt{13 - 4\sqrt{6}}\,mg$.