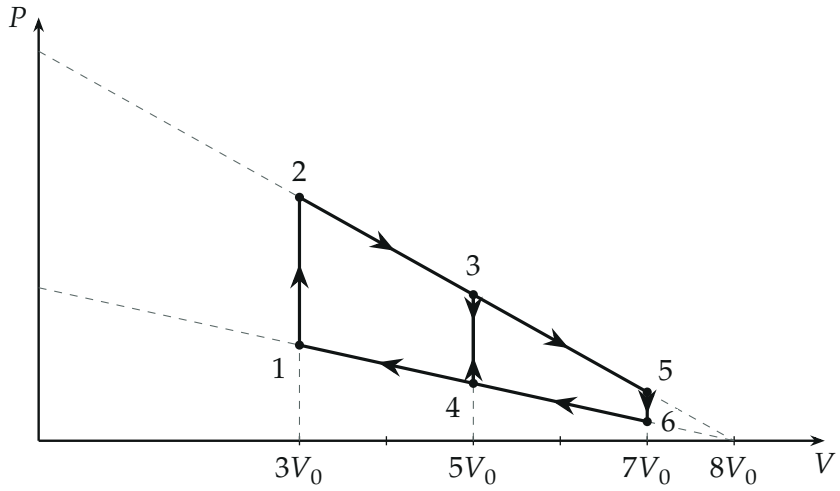
Циклы на диаграмме с общей точкой пересечения

Задача 2. [Физтех 2025/26, 11 класс, варианты 11-01–11-04, задача 2] На диаграмме зависимости давления P от объёма V для одноатомного идеального газа линии 2-3-5 и 1-4-6 — прямые, пересекающие ось объёма в точке $8V_0$, где V_0 — некоторый неизвестный объём. Процессы 1-2, 4-3 и 5-6 — изохорические процессы, проводимые при объёмах $3V_0$, $5V_0$ и $7V_0$. Работа газа в цикле 1-2-5-6-1 равна A. КПД цикла 4-3-5-6-4 равен η_2.

1. Найдите работы газа A_1 и A_2 в циклах 1-2-3-4-1 и 4-3-5-6-4.
2. Найдите количества теплоты Q_{12} и Q_{43}, подводимые к газу в процессах 1-2 и 4-3.
3. Найдите КПД η_1 цикла 1-2-3-4-1.



▲ **Решение. Что происходит.** Работа газа за цикл — площадь фигуры на диаграмме P–V. Обе прямые проходят через точку $(8V_0;\,0)$, поэтому на каждой из них давление пропорционально расстоянию до этой точки: $P = k(8V_0 - V)$, с коэффициентом k_2 для линии 2-3-5 и k_1 для линии 1-4-6. Все площади пропорциональны $(k_2 - k_1)V_0^2$. Теплота на изохорах

равна изменению внутренней энергии, а на наклонных прямых теплота подводится не на всём протяжении — это нужно учесть в КПД.

Обозначения. P_i — давление в точке i. Из уравнения прямых

$$P_1 = 5k_1V_0, \quad P_4 = 3k_1V_0, \quad P_6 = k_1V_0,$$
$$P_2 = 5k_2V_0, \quad P_3 = 3k_2V_0, \quad P_5 = k_2V_0.$$

Внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}PV$.

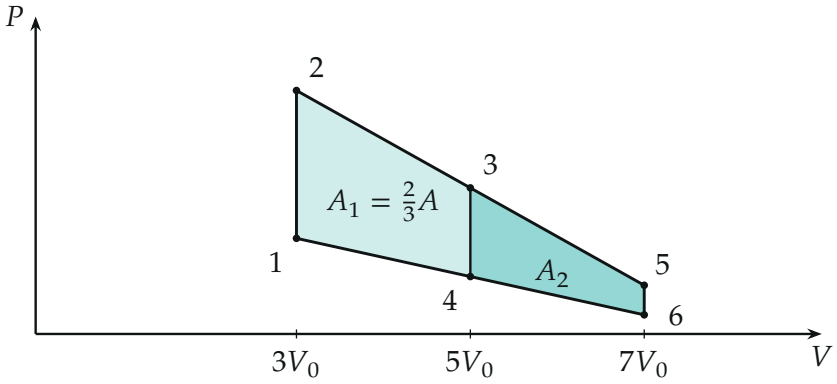
Пункт 1.

1. Работы в циклах. Цикл 1-2-3-4 — трапеция с вертикальными основаниями $P_2 - P_1 = 5(k_2 - k_1)V_0$ и $P_3 - P_4 = 3(k_2 - k_1)V_0$ и высотой $2V_0$; цикл 4-3-5-6 — трапеция с основаниями $3(k_2 - k_1)V_0$ и $(k_2 - k_1)V_0$ и высотой $2V_0$; цикл 1-2-5-6 — с основаниями $5(k_2 - k_1)V_0$, $(k_2 - k_1)V_0$ и высотой $4V_0$. Все три цикла обходятся по часовой стрелке, работа положительна:

$$A_1 = 8(k_2 - k_1)V_0^2, \quad A_2 = 4(k_2 - k_1)V_0^2, \quad A = 12(k_2 - k_1)V_0^2. \quad (1)$$

Отсюда

$$A_1 = \frac{2}{3}A, \qquad A_2 = \frac{1}{3}A.$$



Работа A_1 — светлая трапеция 1-2-3-4, *работа A_2 — тёмная* 4-3-5-6; *вместе они дают A цикла* 1-2-5-6.

Пункт 2.

2. Теплота на изохорах. При $V = \text{const}$ работа равна нулю, и по первому закону термодинамики $Q = \Delta U = \frac{3}{2}\Delta(PV)$:

$$Q_{12} = \frac{3}{2}(P_2 - P_1)\,3V_0 = \frac{45}{2}(k_2 - k_1)V_0^2,$$
$$Q_{43} = \frac{3}{2}(P_3 - P_4)\,5V_0 = \frac{45}{2}(k_2 - k_1)V_0^2.$$

С учётом (1), $(k_2 - k_1)V_0^2 = A/12$:

$$Q_{12} = Q_{43} = \frac{15}{8}A.$$

Пункт 3.

3. Теплота на наклонной прямой. Запишем первый закон для малого участка прямой $P = k(8V_0 - V)$: $\delta Q = dU + P\,dV$, где $U = \frac{3}{2}PV = \frac{3}{2}kV(8V_0 - V)$. Тогда

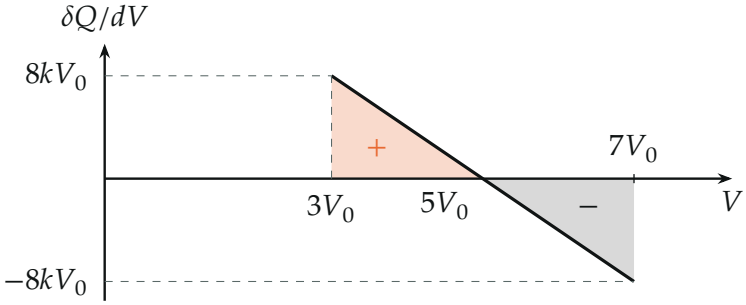
$$\delta Q = \left[\tfrac{3}{2}k(8V_0 - 2V) + k(8V_0 - V)\right]dV = 4k\,(5V_0 - V)\,dV.$$

При расширении теплота подводится, пока $V < 5V_0$, и отводится при $V > 5V_0$; при сжатии — наоборот. Точки 3 и 4 (как раз при $V = 5V_0$) — точки смены знака теплоты. Интегрируя:

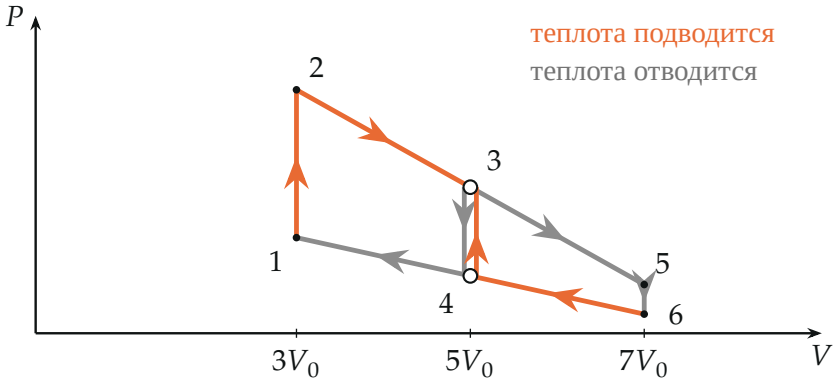
$$Q_{23} = 4k_2\int_{3V_0}^{5V_0}(5V_0 - V)\,dV = 8k_2V_0^2 > 0, \qquad Q_{35} = -8k_2V_0^2 < 0,$$

$$Q_{64} = 4k_1\int_{7V_0}^{5V_0}(5V_0 - V)\,dV = 8k_1V_0^2 > 0, \qquad Q_{41} = -8k_1V_0^2 < 0.$$

Удобно видеть это на графике $\delta Q/dV$ от V: это прямая, и каждый интеграл — площадь треугольника с катетами $2V_0$ и $8kV_0$, то есть $8kV_0^2$.



$\delta Q/dV = 4k(5V_0 - V)$ на одной прямой. При расширении от $3V_0$ до $5V_0$ газ получает $8kV_0^2$ (светло-морковный треугольник), от $5V_0$ до $7V_0$ столько же отдаёт (серый); при сжатии знаки меняются.



Знак теплоты на участках цикла. Точки смены знака 3 и 4 — на $V = 5V_0$.

4. Теплота, подведённая в циклах. В цикле 1-2-3-4 тепло подводится на участках 1-2 и 2-3, в цикле 4-3-5-6 — на 4-3 и 6-4. Поэтому

$$\eta_1 = \frac{A_1}{Q_{12} + Q_{23}} = \frac{2A/3}{15A/8 + 8k_2V_0^2},$$

$$\eta_2 = \frac{A_2}{Q_{43} + Q_{64}} = \frac{A/3}{15A/8 + 8k_1V_0^2}.$$

Обратите внимание: в знаменатель входит только подведённая теплота; Q_{35} и Q_{41} — отведённая, в КПД не учитывается.

5. Исключаем k_1 и k_2. Из (1): $8k_2V_0^2 = 8k_1V_0^2 + \frac{2}{3}A$. Выразим из η_2 величину $\dfrac{1}{\eta_2} = 3\left(\dfrac{15}{8} + \dfrac{8k_1V_0^2}{A}\right)$; тогда

$$\frac{1}{\eta_1} = \frac{3}{2}\left(\frac{15}{8} + \frac{8k_1V_0^2}{A} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2\eta_2} + 1 \;\Rightarrow\; \eta_1 = \frac{2\eta_2}{2\eta_2 + 1}.$$

Проверка. Численно при $k_1 = 1$, $k_2 = 2{,}5$ (в единицах V_0^2): $A = 18$, $Q_{12} = Q_{43} = 33{,}75 = \frac{15}{8}A$, $Q_{23} = 20$, $Q_{64} = 8$, $\eta_1 = 12/53{,}75 = 0{,}2233$; $\eta_2 = 6/41{,}75$, $2\eta_2/(2\eta_2 + 1) = 0{,}2233$. Предельный случай $k_1 \to 0$ (нижняя прямая сливается с осью V): $\eta_2 = \dfrac{A/3}{15A/8} = \dfrac{8}{45}$, $\eta_1 = \dfrac{2A/3}{15A/8 + 2A/3} = \dfrac{16}{61}$, а формула даёт $\dfrac{16/45}{16/45 + 1} = \dfrac{16}{61}$. Размерность: η безразмерен. Смысл: оба КПД определяются одной неизвестной $k_1V_0^2/A$, поэтому они связаны.

Ответ. 1) $A_1 = \dfrac{2}{3}A$, $A_2 = \dfrac{1}{3}A$; 2) $Q_{12} = Q_{43} = \dfrac{15}{8}A$; 3) $\eta_1 = 2\eta_2/(2\eta_2 + 1)$.