Диоды, катушка и конденсатор после замыкания ключа

Задача 3. [Физтех 2025/26, 11 класс, варианты 11-01–11-04, задача 3] В цепи, схема которой изображена на рис. 1, ЭДС идеального источника $\mathcal{E} = 10{,}5\,U_0$. Все диоды одинаковые. ВАХ диода (зависимость тока I через диод от напряжения U на нём) показана на рис. 2, напряжение открытия диода $U_\text{D} = U_0$. Индуктивность идеальной катушки L. Ёмкость конденсатора C.

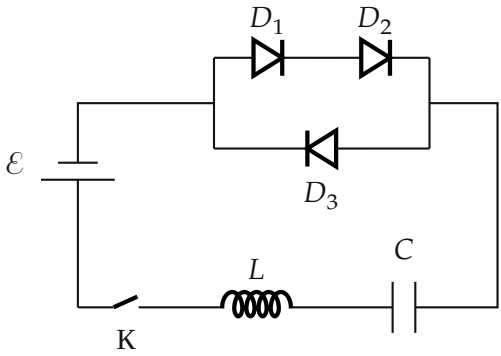


рис. 1

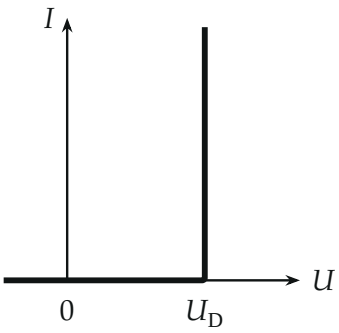


рис. 2

1. В каких пределах должен находиться заряд на левой обкладке конденсатора, чтобы после замыкания ключа K ток в цепи не протекал?

Для следующих пунктов задачи конденсатор до замыкания ключа не заряжен, затем ключ замыкают.

2. Найдите скорость возрастания тока в катушке сразу после замыкания ключа.
3. Через некоторое время τ после замыкания ключа заряд на конденсаторе устанавливается и в дальнейшем не изменяется. Найдите время τ и установившийся заряд q_0 на левой обкладке конденсатора.
4. Найдите выделившуюся теплоту Q_2 в диоде D_2 после замыкания ключа.

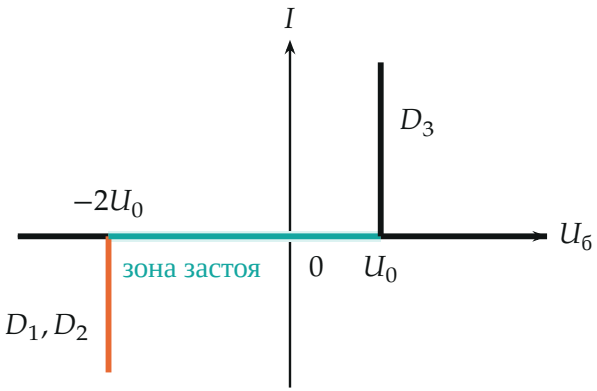
Ответы выразить через U_0, L, C.

▲ **Решение. Что происходит.** Три диода работают как один нелинейный элемент — «блок». Пока напряжение на блоке лежит в зоне застоя, тока нет. Вне зоны блок открыт: в одну сторону через D_3, и тогда на нём постоянное напряжение U_0; в другую — через последовательные D_1 и D_2, и тогда $2U_0$. Открытый блок — как источник постоянного напряжения, и контур с катушкой и конденсатором колеблется с периодом $2\pi\sqrt{LC}$ около положения равновесия, которое зависит от того, через какие диоды идёт ток. Когда ток в катушке падает до нуля, смотрим, попало ли напряжение на конденсаторе в зону застоя: если нет — ток идёт обратно и колебание продолжается уже около другого положения равновесия. Ток катушки и заряд конденсатора скачком не меняются.

Обозначения. q — заряд левой обкладки, $U_C = q/C$. I — ток в контуре: положительный, если течёт от «плюса» источника (длинная пластина) через ключ и катушку к левой обкладке, далее вправо через блок диодов справа налево (через D_3), в источник. $U_б$ — напряжение на блоке: потенциал правого узла минус потенциал левого. Тогда D_3 открыт при $U_б = U_0$ ($I > 0$), а D_1, D_2 — при $U_б = -2U_0$ ($I < 0$).

Правило Кирхгофа для контура по направлению тока:

$$L\frac{dI}{dt} = \mathcal{E} - \frac{q}{C} - U_б. \qquad (1)$$



ВАХ блока из трёх диодов: ток идёт только при $U_б = U_0$ (вперёд) или $U_б = -2U_0$ (назад).

Пункт 1.

1. Условие отсутствия тока. В момент замыкания $I = 0$, и ток не появится, если все диоды останутся закрытыми. Тогда $dI/dt = 0$ и по (1) напряжение на блоке определено остальной цепью: $U_б = \mathcal{E} - q/C$. Диоды закрыты, если оно лежит в зоне застоя: $-2U_0 \le \mathcal{E} - q/C \le U_0$. Подставляем $\mathcal{E} = 10{,}5\,U_0$:

$$9{,}5\,CU_0 \le q \le 12{,}5\,CU_0.$$

Пункт 2.

2. Сразу после замыкания. Заряд $q = 0$, ток $I = 0$. Напряжение на блоке по (1) требовало бы $U_б = \mathcal{E} = 10{,}5\,U_0 > U_0$ — это вне зоны, значит, D_3 открывается, и $U_б = U_0$. Из (1):

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E} - U_0}{L} = \frac{9{,}5\,U_0}{L}.$$

Пункт 3.

3. Колебания около двух положений. Подставим $I = dq/dt$ в (1) для открытого блока. При $I > 0$ ($U_б = U_0$) и при $I < 0$ ($U_б = -2U_0$):

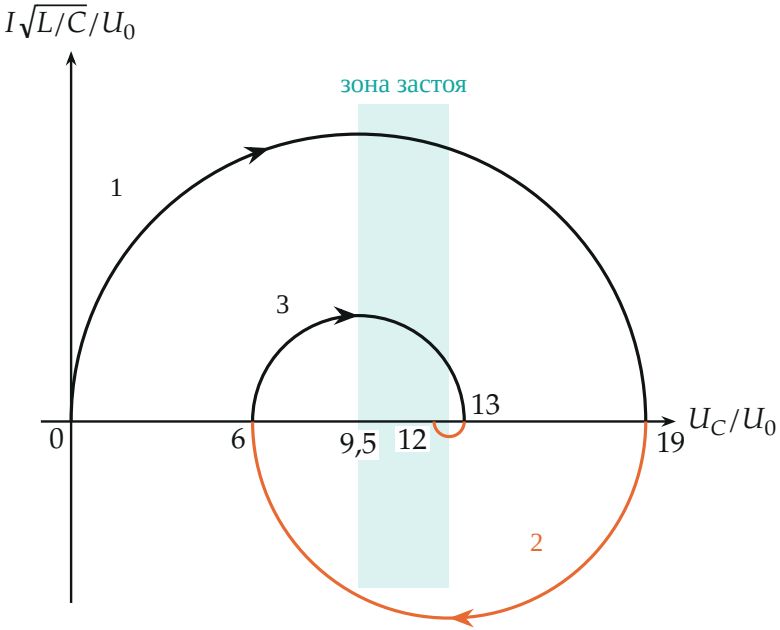
$$L\ddot{q} = (\mathcal{E} - U_0) - \frac{q}{C}, \qquad L\ddot{q} = (\mathcal{E} + 2U_0) - \frac{q}{C}.$$

Это колебания с частотой $\omega = 1/\sqrt{LC}$ около $q = 9{,}5\,CU_0$ (ток вперёд) и около $q = 12{,}5\,CU_0$ (ток назад). Если в начале стадии $I = 0$, то за полупериод $\pi\sqrt{LC}$ заряд проходит от одной крайней точки к другой, симметричной относительно центра: напряжение на конденсаторе U_C отражается от центра. Удобно считать U_C в единицах U_0.

4. Цепочка стадий.

- Стадия 1, ток вперёд, центр 9,5: $0 \to 19$. В конце $I = 0$, но $19 > 12{,}5$ — вне зоны застоя, ток идёт назад.
- Стадия 2, ток назад, центр 12,5: $19 \to 6$. $6 < 9{,}5$ — вне зоны, ток опять вперёд.

- Стадия 3, ток вперёд, центр 9,5: $6 \to 13$. $13 > 12{,}5$ — вне зоны, ток назад.
- Стадия 4, ток назад, центр 12,5: $13 \to 12$. 12 лежит в зоне застоя $(9{,}5;\ 12{,}5)$ — ток остановился навсегда.

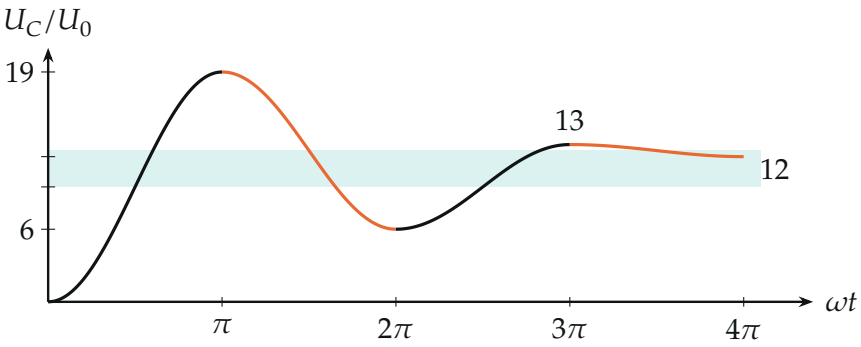


Фазовая картина (U_C и ток в единицах U_0 и $U_0\sqrt{C/L}$): полуокружности чередуются; чёрные — ток вперёд, морковные — назад. Номера — стадии 1, 2, 3.

5. Результат. Каждая стадия длится полупериод $\pi\sqrt{LC}$ (он не зависит от амплитуды), стадий четыре:

$$\tau = 4\pi\sqrt{LC}, \qquad q_0 = 12\,CU_0.$$

Обратите внимание: колебание кончается не в центре, а в первой точке остановки тока, которая попала в зону застоя; поэтому $q_0 = 12\,CU_0$, а не $9{,}5\,CU_0$ и не $12{,}5\,CU_0$.



Напряжение на конденсаторе: $0 \to 19 \to 6 \to 13 \to 12$ *(в единицах* U_0*); закрашена зона застоя.*

Пункт 4.

6. Теплота в D_2. Диод D_2 открыт только на стадиях с током назад (2 и 4), и тогда через него идёт весь ток контура. Напряжение на открытом диоде постоянно и равно U_0, поэтому теплота равна U_0, умноженному на прошедший заряд. Заряд за стадию равен изменению q: на стадии 2 $\Delta q = (19-6)\,CU_0 = 13\,CU_0$, на стадии 4 — $(13-12)\,CU_0 = CU_0$:

$$Q_2 = U_0\,(13+1)\,CU_0 = 14\,CU_0^2.$$

Проверка. Баланс энергии: источник совершил работу $\mathcal{E}q_0 = 10{,}5 \cdot 12\,CU_0^2 = 126\,CU_0^2$ (через источник прошёл заряд q_0). Энергия конденсатора $q_0^2/2C = 72\,CU_0^2$. Теплота в D_3 (стадии 1 и 3, заряд $19+7=26$): $26\,CU_0^2$; в D_1 и D_2 вместе: $2U_0 \cdot 14\,CU_0 = 28\,CU_0^2$. Сумма $72+26+28 = 126$ — баланс сходится. Размерность: CU_0^2 — энергия; $\sqrt{LC}$ — время.

Ответ. 1) $9{,}5\,CU_0 \le q \le 12{,}5\,CU_0$; 2) $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{9{,}5\,U_0}{L}$; 3) $\tau = 4\pi\sqrt{LC}$, $q_0 = 12\,CU_0$; 4) $Q_2 = 14\,CU_0^2$.