# Частица в скрещенных полях E и B

**Задача 4.** [Физтех 2025/26, 11 класс, варианты 11-01–11-04, задача 4] В скрещенных электрическом и магнитном полях (вектор $\vec{E}$ напряжённости однородного электрического поля перпендикулярен вектору индукции $\vec{B}$ однородного магнитного поля) частице массой $m$ и зарядом $q > 0$ в точке $C$ сообщили скорость $V_0$, параллельную вектору $\vec{E}$ (см. рис.). Через некоторое время частица оказалась в точке $A$, где вектор её скорости первый раз повернулся на 90°.

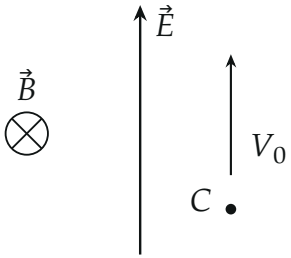



*Рис. 1. Рисунок из условия: поле $\vec{B}$ направлено от нас (за плоскость рисунка)*

1. Найдите радиус $R_C$ кривизны траектории частицы в точке $C$.
2. Найдите скорость $V_A$ частицы в точке $A$.
3. Найдите радиус $R_A$ кривизны траектории частицы в точке $A$.

Движение частицы нерелятивистское. Считать, что $V_0 = \sqrt{3}\,E/B$. Ответы выразить через $B$, $E$, $m$, $q$.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Электрическая сила постоянна, магнитная зависит от скорости, и траектория выходит сложной (петли, сдвигающиеся вбок). Это упрощается переходом в систему отсчёта, которая движется со скоростью дрейфа $u = E/B$ перпендикулярно полям: в ней электрическая сила пропадает, и частица равномерно вращается по окружности. Радиус кривизны в точке $C$ находим из второго закона Ньютона вдоль нормали.

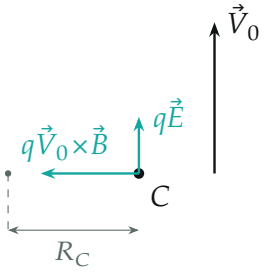
**Обозначения.** Ось $x$ вправо, ось $y$ вверх (вдоль $\vec{E}$), $\vec{B}$ направлено от нас; $\omega = qB/m$; $u = E/B$, так что $V_0 = \sqrt{3}\,u$; $a$ — ускорение частицы.

**Пункт 1. Радиус кривизны в $C$.**

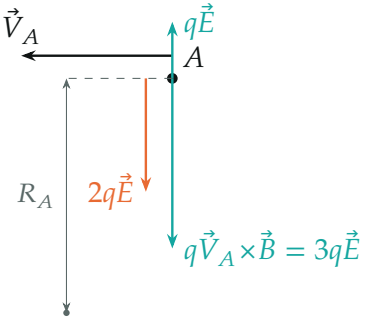
**1. Силы в точке** $C$ (рис. 2а). Электрическая сила $q\vec{E}$ направлена вверх, вдоль скорости. Магнитная сила $qV_0B$ перпендикулярна скорости; по правилу левой руки (положительный заряд, $\vec{B}$ от нас) она направлена влево.

**2. Второй закон Ньютона вдоль нормали.** Вдоль скорости электрическая сила только разгоняет частицу и траекторию не искривляет. Искривляет только магнитная сила:

$$\frac{mV_0^2}{R_C} = qV_0B \quad \Rightarrow \quad R_C = \frac{mV_0}{qB} = \frac{\sqrt{3}\,mE}{qB^2}.$$




(а) в точке $C$




(б) в точке $A$

*Рис. 2. Силы в точках $C$ и $A$: в $C$ нормальная составляющая — только магнитная сила; в $A$ электрическая и магнитная силы направлены противоположно. Масштабы сил и длин на рисунке разные*

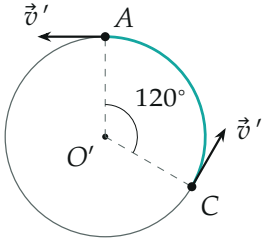
**Пункт 2. Скорость в** $A$**.**

**3. Система отсчёта дрейфа.** Частица, движущаяся влево со скоростью $u = E/B$, получает от магнитного поля силу $quB$ вниз, и эта сила гасит $qE$: суммарная сила на неё равна нулю. Значит, в системе $K'$, которая движется влево со скоростью $\vec{u}$, электрического поля нет, а остаётся одна магнитная сила. Она перпендикулярна скорости $\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{u}$: частица движется в $K'$ равномерно по окружности (угловая скорость $\omega$, против часовой стрелки, потому что в $C$ магнитная сила смотрит влево от скорости).

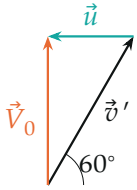
**4. Скорость в $K'$ в точке $C$.** $\vec{v}\,' = \vec{V}_0 - \vec{u}$ (рис. 3б): горизонтальная составляющая равна $+u$ (вправо), вертикальная $V_0 = \sqrt{3}\,u$. Отсюда

$$w = \sqrt{u^2 + 3u^2} = 2u = \frac{2E}{B},$$

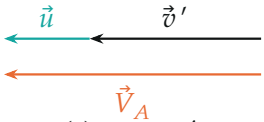
и $\vec{v}\,'$ направлена под 60° к оси $x$. Радиус окружности в $K'$ равен $r = \dfrac{mw}{qB} = \dfrac{2mE}{qB^2}$.




(а) окружность в $K'$




(б) в точке $C$
$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}$




(в) в точке $A$

*Рис. 3. Переход в систему $K'$: (а) окружность, по которой частица идёт в $K'$, и её дуга $CA$; (б), (в) сложение скоростей*

**5. Где скорость повернулась на 90°.** В лабораторной системе скорость стала горизонтальной (влево), если вертикальная составляющая равна нулю. При переходе от $K'$ вертикальные составляющие одинаковы ($\vec{u}$ горизонтальна), поэтому $v'_y = 0$: вектор $\vec{v}\,'$ горизонтален. Он начал с угла 60° и вращается против часовой стрелки, так что сначала он становится равным $(-w;\,0)$ после поворота на 120° (рис. 3а). Тогда лабораторная скорость направлена влево (повёрнута на 90° от начальной — вверх) — это точка $A$. Вектор $\vec{v}\,' = (+w;\,0)$ был бы позже, после поворота на 300°, и лабораторная скорость при этом смотрела бы вправо.

**6. Скорость в $A$.** Обе скорости — $\vec{v}\,'$ и $\vec{u}$ — направлены влево (рис. 3в), поэтому модули складываются:

$$V_A = w + u = \frac{2E}{B} + \frac{E}{B} = \frac{3E}{B}.$$

**Пункт 3. Радиус кривизны в $A$.**

**7. Ускорение.** Ускорение при переходе между системами, движущимися друг относительно друга равномерно, не меняется. В $K'$ движение — равномерное по окружности, поэтому ускорение центростремительное и везде равно по модулю

$$a = \omega w = \frac{qB}{m} \cdot \frac{2E}{B} = \frac{2qE}{m}.$$

В точке $A$ оно направлено вниз (к центру окружности $K'$) и перпендикулярно горизонтальной скорости $\vec{V}_A$: ускорение целиком нормальное.

**8. Радиус кривизны.**

$$a = \frac{V_A^2}{R_A} \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{V_A^2}{a} = \frac{9E^2}{B^2} \cdot \frac{m}{2qE} = \frac{9mE}{2qB^2}.$$

Тот же результат даёт второй закон Ньютона в проекции на нормаль: $qV_AB - qE = 2qE = mV_A^2/R_A$ (рис. 2б).

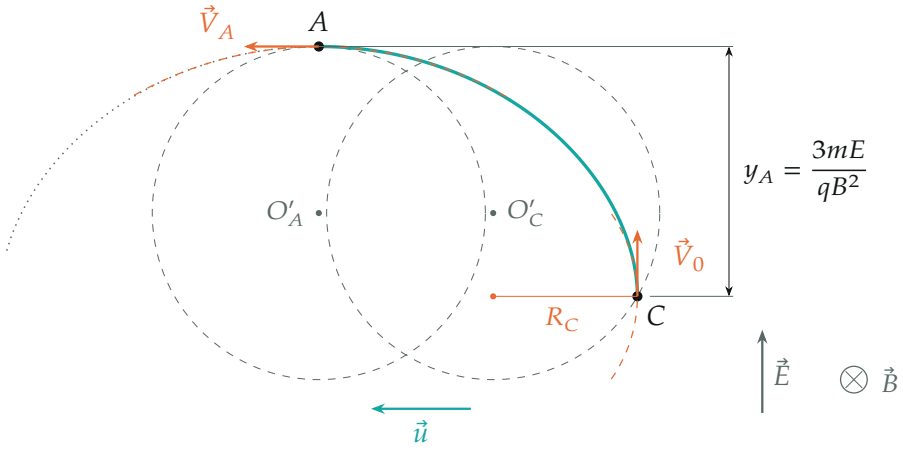



*Рис. 4. Траектория от C до A (бирюзовая), её продолжение (пунктир точками), окружности в $K'$ в моменты C и A (центр $O'$ смещается влево со скоростью u) и окружности кривизны*

**Обратите внимание.** В точке $C$ электрическая сила направлена вдоль скорости и не искривляет траекторию, поэтому в уравнение нормали

входит только $qV_0B$. В точке $A$ силы $qV_AB$ и $qE$ направлены противоположно, и нормальное ускорение определяет их разность $2qE$. Угол поворота скорости в $K'$ (120°) отличается от угла поворота в лабораторной системе (90°).

**Проверка.** Размерность: $E/B$ — скорость, $mE/(qB^2)$ — длина. Второй способ для пункта 2: из $m\,dv_x/dt = -qBv_y$ следует $v_x = -\omega y$ (при $v_x(0) = 0$, $y(0) = 0$), а из энергии $V^2 = V_0^2 + 2(qE/m)\,y$. В точке $A$ $v_y = 0$ и $V_A = \omega y_A$, поэтому $V_A^2 = 3u^2 + 2uV_A$, то есть $V_A = 3u$ (второй корень $-u$ отвечает $v_x > 0$). Для $C$: касательное ускорение $qE/m$, нормальное $\sqrt{3}\,qE/m$, полное $2qE/m$ — совпадает с $\omega w$. Численное интегрирование уравнения движения дало $V_A = 3E/B$ в точке $y_A = 3mE/(qB^2)$ и $R_A = 4{,}5\,mE/(qB^2)$. Смысл: траектория — вытянутая трохоида, дрейф в $K'$ складывается с вращением, и в верхней точке частица быстрее всего.

**Ответ.** 1) $R_C = \dfrac{\sqrt{3}\,mE}{qB^2}$; 2) $V_A = \dfrac{3E}{B}$; 3) $R_A = \dfrac{9mE}{2qB^2}$.