Лазерное пятно на дне озера

Задача 5. [Физтех 2025/26, 11 класс, варианты 11-01–11-04, задача 5] В сумерках Вова с Леной отправились к берегу озера. Лена посветила лучом лазерной указки на спокойную поверхность воды и увидела яркую точку (небольшое яркое пятно) на мелкопесчаном дне, на глубине нескольких сантиметров. Эта точка находилась внутри тёмной овальной области, окружённой светлым кольцом (см. рис.). Внутренняя граница кольца была достаточно чёткой, а внешняя размытой. Овальная область имела ось симметрии — ось x. Вова осторожно вошёл в воду и с помощью погружённой в воду линейки сумел определить некоторые размеры овальной области на дне: $b = 12$ см и $c/a = 1{,}1$. Показатель преломления воды $n = 4/3$, наклон дна к горизонту постоянный.

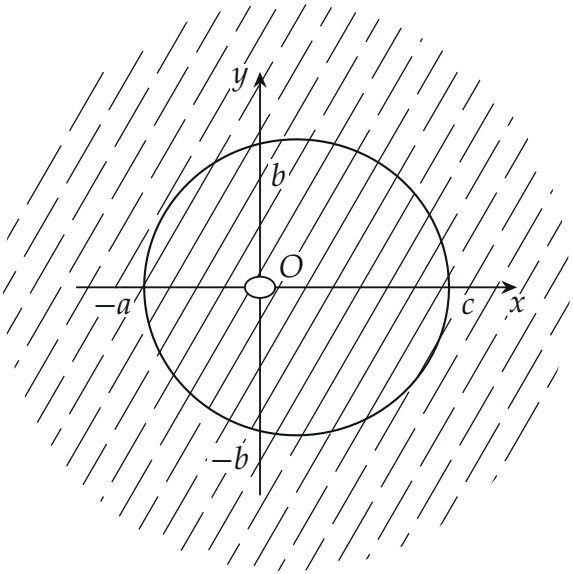


Рис. 1. Вид сверху на дно: яркая точка O, тёмная область (внутри штриха), светлое кольцо снаружи. Асимметрия c/a на рисунке преувеличена

1. Назовите физическое явление, из-за которого формируется достаточно чёткая граница между тёмной областью и светлым кольцом.
2. Найдите расстояние h_0 от яркой точки до поверхности воды.

3. На каком расстоянии L, считая по горизонтали, от кромки воды (берега) находится яркая точка на дне?

▲ **Решение. Что происходит.** Яркая точка S на песке рассеивает свет во все стороны и служит источником. Лучи от S падают на поверхность воды под разными углами. При малых углах почти весь свет выходит в воздух, и дно остаётся тёмным. При углах больше предельного свет полностью отражается от поверхности и возвращается на дно — получается светлое кольцо. Граница между ними соответствует лучу, падающему под предельным углом: из неё находятся размеры.

Обозначения. α — предельный угол; β — угол наклона дна; S — яркая точка; S' — её изображение в поверхности воды; h_0 — глубина S; $t = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$.

Пункт 1. Явление.

1. Свет, падающий из воды (оптически более плотной среды, $n = 4/3$) на границу с воздухом, при угле падения θ выходит наружу, пока $\sin\theta < 1/n$. Когда $\sin\theta \geqslant 1/n$, преломлённого луча нет, и свет полностью отражается назад в воду. Это полное внутреннее отражение, предельный угол

$$\sin\alpha = \frac{1}{n} = \frac{3}{4}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{3/4}{\sqrt{1-9/16}} = \frac{3}{\sqrt{7}}.$$

Граница чёткая, потому что при $\theta < \alpha$ отражается малая доля света, а при $\theta \geqslant \alpha$ — весь: яркость при переходе через α меняется скачком. Внешняя граница размыта: лучи под всё большими углами несут всё меньше света.

Пункт 2. Глубина яркой точки.

2. Сечение вдоль оси y. Рассмотрим вертикальную плоскость, проходящую через S перпендикулярно оси x. Дно наклонено вдоль x, поэтому в этой плоскости оно горизонтально, и глубина везде равна h_0. Граница тёмной области — это точки, куда после отражения приходит луч, падавший на поверхность под предельным углом α (рис. 2).

3. Геометрия. Предельный луч поднимается на h_0 и смещается по горизонтали на $h_0 \operatorname{tg}\alpha$, затем отражается (угол отражения равен углу падения) и спускается на дно, смещаясь ещё на $h_0 \operatorname{tg}\alpha$. Это то же, что прямой

луч из мнимого источника S' на высоте h_0 над поверхностью. Расстояние от S до границы вдоль оси y равно b:

$$b = 2h_0 \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{b}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{12\cdot\sqrt{7}}{2\cdot 3}\ \text{см} = 2\sqrt{7}\ \text{см} \approx 5{,}3\ \text{см}.$$

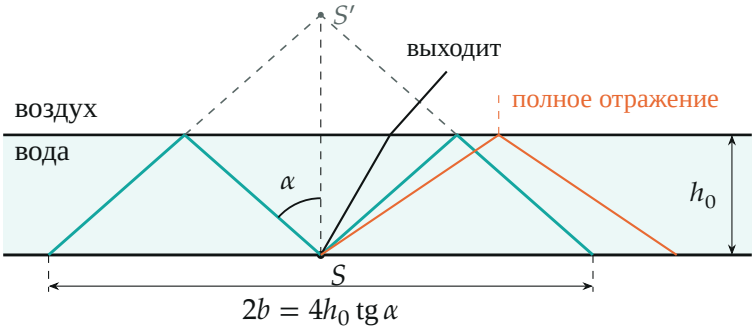


Рис. 2. Сечение $x = 0$ (дно горизонтально): лучи с углом падения меньше α выходят, с углом α — граничные, больше — полностью отражаются

Пункт 3. Расстояние до берега.

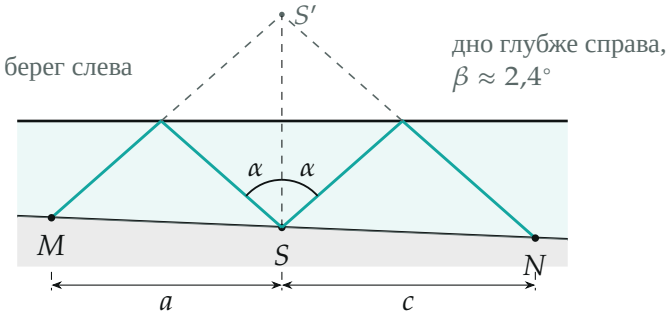


Рис. 3. Вертикальное сечение вдоль оси x в натуральном масштабе (наклон $\beta \approx 2{,}4°$ едва заметен): граничные лучи от S приходят в M и N

4. Сечение вдоль оси x. В вертикальной плоскости xz дно — прямая, наклонённая на β (рис. 3). Ось z вверх, поверхность воды $z = 0$, $S = (0;\, -h_0)$, мнимый источник $S' = (0;\, +h_0)$. Вправо (в сторону большей

глубины, длиннее c) дно идёт вниз: $z = -(h_0 + x\,\mathrm{tg}\,\beta)$, влево $x < 0$ — вверх.

5. Где луч встречает дно. Прямая от S' под углом α к вертикали вправо задаётся $x = (h_0 - z)\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Подставим дно $z = -(h_0 + x\,\mathrm{tg}\,\beta)$:

$$x_N = (2h_0 + x_N\,\mathrm{tg}\,\beta)\,\mathrm{tg}\,\alpha \;\Rightarrow\; x_N = \frac{2h_0\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-t} = \frac{b}{1-t}.$$

Влево: $x = -(h_0 - z)\,\mathrm{tg}\,\alpha$, откуда $|x_M| = \dfrac{b}{1+t}$. Линейка лежит на наклонном дне, и расстояния вдоль него — это горизонтальные проекции, делённые на одно и то же $\cos\beta$; их отношение то же:

$$\frac{c}{a} = \frac{1+t}{1-t}.$$

6. Угол наклона дна. $\dfrac{c}{a} = 1{,}1$ даёт $1 + t = 1{,}1(1 - t)$, то есть $t = \dfrac{1{,}1 - 1}{1{,}1 + 1} = \dfrac{1}{21}$. Тогда

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{t}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{1}{21}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{\sqrt{7}}{63}\ (\beta \approx 2{,}4^\circ).$$

7. Расстояние до кромки. На кромке глубина равна нулю, а в точке S равна h_0; дно — плоскость с наклоном β (рис. 4), поэтому по горизонтали

$$L = \frac{h_0}{\mathrm{tg}\,\beta} = 2\sqrt{7}\cdot\frac{63}{\sqrt{7}}\ \text{см} = 126\ \text{см}.$$

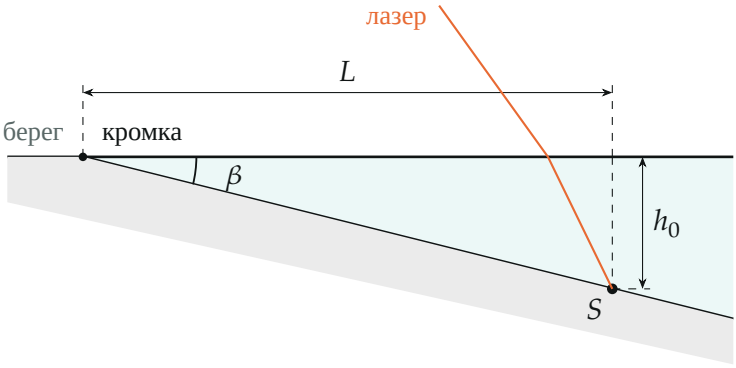


Рис. 4. Профиль дна от кромки до яркой точки: $h_0 = L\,\mathrm{tg}\,\beta$. Угол β на рисунке сильно увеличен (в задаче $\mathrm{tg}\,\beta = \sqrt{7}/63$)

Обратите внимание. Предельный угол отсчитывается от нормали к поверхности, то есть от вертикали, а не от дна: наклон дна на угол падения не влияет. Вдоль оси y глубина постоянна, поэтому b даёт h_0 сразу, а $a \neq c$ из-за разной глубины по сторонам от S. Линейка вдоль дна даёт расстояния в $1/\cos\beta \approx 1{,}001$ раза больше проекций; в отношении c/a множитель сокращается.

Проверка. Размерности: все ответы — длины. При $c/a \to 1$ (дно горизонтально) $\mathrm{tg}\,\beta \to 0$ и $L \to \infty$: берег бесконечно далеко. Граница области — коническое сечение $r = \dfrac{b}{1 - t\cos\varphi}$ с фокусом в S и эксцентриситетом t; она даёт $a = \dfrac{b}{1+t} = 11{,}5$ см и $c = \dfrac{b}{1-t} = 12{,}6$ см, их отношение 1,1, как в условии. Смысл: по размерам светлого кольца можно найти и глубину, и уклон дна, не заходя глубоко.

Ответ. 1) полное внутреннее отражение света на границе вода — воздух; 2) $h_0 = 2\sqrt{7}$ см $\approx 5{,}3$ см; 3) $L = 126$ см.