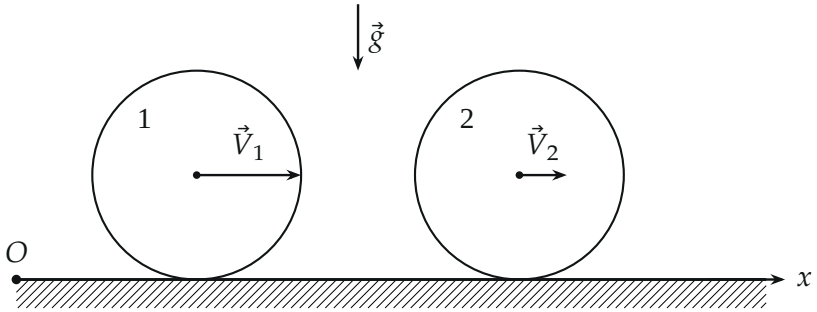
Столкновение двух катящихся обручей

Задача 1. [Физтех 2025/26, 11 класс, варианты 11-05–11-06, задача 1] Два одинаковых массивных обруча 1 и 2 радиусом $R = 0{,}5$ м катятся без проскальзывания по горизонтальной шероховатой поверхности со скоростями $V_1 = 1$ м/с и $V_2 = 0{,}2$ м/с в одном направлении (см. рис.). Масса каждого обруча равномерно распределена по его длине. Оказалось, что сразу после столкновения обручей модуль отношения ускорений нижней точки A и верхней точки B первого обруча равен $\sqrt{5}$. Трением между обручами можно пренебречь. Считать, что время соударения обручей достаточно мало, и за время соударения угловая скорость каждого обруча практически не изменяется. Считать соударение абсолютно упругим. Принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Обручи до и после столкновения движутся в одной вертикальной плоскости.

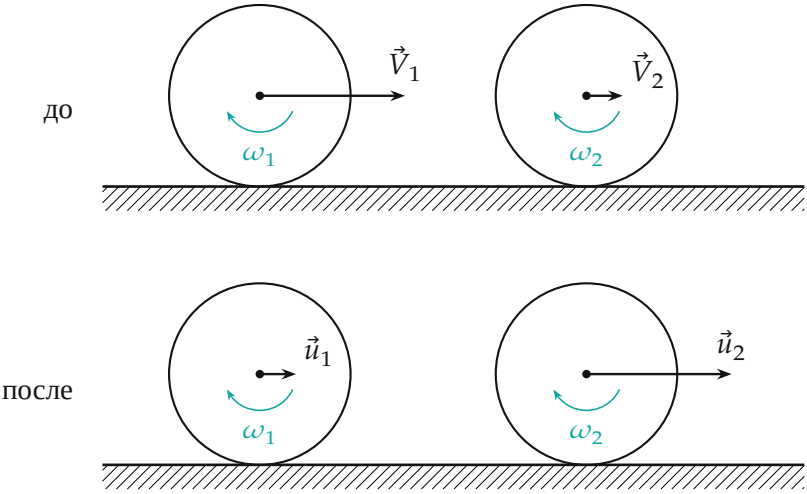
1. Найдите скорости u_1 и u_2 центров масс каждого обруча сразу после их столкновения. Укажите направления (налево или направо) скоростей.
2. Найдите коэффициент трения μ между обручем и горизонтальной поверхностью.
3. Найдите установившиеся скорости w_1 и w_2 центров масс каждого обруча после столкновения и прекращения проскальзывания. Укажите направления (налево или направо) скоростей.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Обручи одинаковы, удар центральный, упругий и без трения между ними, поэтому центры масс обменяются скоростями. Угловые скорости при ударе не меняются, а скорость

центра масс — меняется, и качение без проскальзывания нарушается: нижняя точка каждого обруча начинает скользить по полу. Сила трения скольжения μmg изменяет скорость центра масс и угловую скорость, пока снова не наступит качение. В пункте 3 поможет момент импульса относительно точки пола: он сохраняется.

Обозначения. Ось x направлена вправо. Угловую скорость ω считаем положительной при вращении по часовой стрелке, тогда качение вправо без проскальзывания — это $v = \omega R$. До удара $\omega_1 = V_1/R = 2$ рад/с, $\omega_2 = V_2/R = 0{,}4$ рад/с. Момент инерции тонкого обруча $I = mR^2$.



Удар меняет местами скорости центров, а угловые скорости (бирюзовые дуги) остаются прежними.

Пункт 1.

1. Скорости после удара. Запишем для системы двух обручей закон сохранения импульса в проекции на ось x (внешние силы за малое время удара импульса не дают) и закон сохранения механической энергии (удар упругий, энергия вращения не меняется, так как ω прежние):

$$V_1 + V_2 = u_1 + u_2, \qquad V_1^2 + V_2^2 = u_1^2 + u_2^2.$$

Из первого $V_1 - u_1 = u_2 - V_2$. Из второго $(V_1 - u_1)(V_1 + u_1) = (u_2 - V_2)(u_2 + V_2)$. Так как обручи столкнулись, $V_1 \neq u_1$, и после сокращения

$V_1 + u_1 = u_2 + V_2$. Вместе с законом сохранения импульса:

$$u_1 = V_2 = 0{,}2 \text{ м/с}, \qquad u_2 = V_1 = 1 \text{ м/с},$$

оба направо.

Пункт 2.

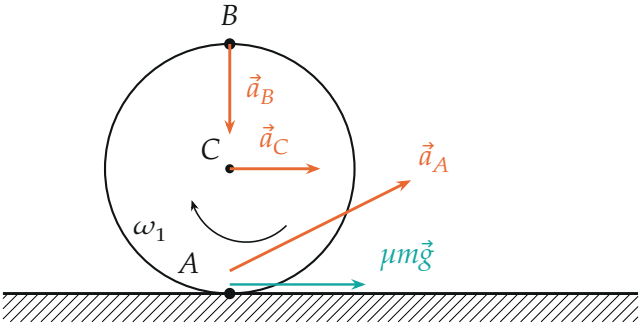
2. Скольжение. Нижняя точка A обруча 1 движется относительно пола со скоростью $u_1 - \omega_1 R = 0{,}2 - 1 = -0{,}8$ м/с, то есть налево. Сила трения скольжения μmg приложена в точке A и направлена направо (против скольжения). Центр масс ускоряется вправо: $a_C = \mu g$. Момент этой силы относительно центра равен μmgR и уменьшает ω (вращение по часовой); при $I = mR^2$ угловое ускорение по модулю $\varepsilon = \mu g/R$.

3. Ускорения точек. Ускорение точки обруча равно сумме ускорения центра масс, касательного ускорения εR при вращении вокруг центра и центростремительного $\omega^2 R$, направленного к центру. Сразу после удара $\omega = \omega_1 = V_1/R$, поэтому $\omega^2 R = V_1^2/R$. Нижняя точка A: касательное ускорение направлено так же, как a_C (вправо), центростремительное — вверх:

$$a_A = \sqrt{(\mu g + \varepsilon R)^2 + (\omega^2 R)^2} = \sqrt{(2\mu g)^2 + \left(\frac{V_1^2}{R}\right)^2}.$$

Верхняя точка B: касательное ускорение направлено влево и гасит a_C, остаётся центростремительное, вниз:

$$a_B = \sqrt{(\mu g - \varepsilon R)^2 + (\omega^2 R)^2} = \frac{V_1^2}{R}.$$



Обруч 1 сразу после удара: сила трения и ускорения центра C, нижней A и верхней B точек (в масштабе: $a_C = 2$, $a_B = 2$, $a_A = \sqrt{20}$ м/с^2).

4. Коэффициент трения. По условию $a_A/a_B = \sqrt{5}$:

$$\sqrt{4\mu^2 g^2 + \frac{V_1^4}{R^2}} = \sqrt{5}\,\frac{V_1^2}{R} \;\Rightarrow\; \mu g = \frac{V_1^2}{R} \;\Rightarrow\; \mu = \frac{V_1^2}{gR} = \frac{1^2}{10 \cdot 0{,}5} = 0{,}2.$$

Обратите внимание: отношение ускорений определяется угловой скоростью *сразу после* удара, а она та же, что до удара, $\omega_1 = V_1/R$; поэтому в ответ входит V_1, а не u_1.

Пункт 3.

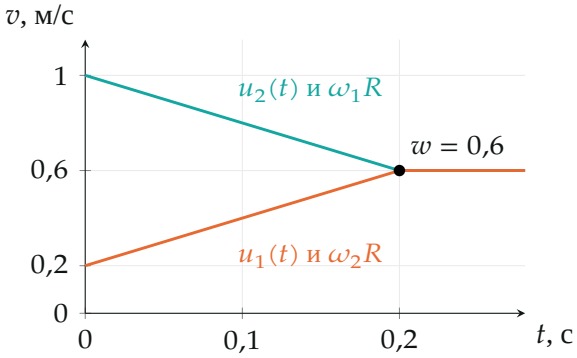
5. Момент импульса относительно точки пола. Возьмём неподвижную точку на полу и рассмотрим один обруч. Сила трения лежит на линии пола, момента не создаёт. Реакция опоры и сила тяжести вертикальны и действуют по одной вертикали (через точку контакта и центр масс), их моменты взаимно уничтожаются. Значит, момент импульса обруча относительно этой точки не меняется:

$$L = mu\,R + I\omega = mR\,(u + \omega R).$$

Момент положителен при вращении по часовой стрелке. После прекращения проскальзывания $\omega = w/R$, то есть $L = 2mRw$. Приравниваем:

$$w = \frac{u + \omega R}{2}.$$

Для обруча 1: $\omega_1 R = V_1$, поэтому $w_1 = \dfrac{u_1 + V_1}{2} = \dfrac{0{,}2 + 1}{2} = 0{,}6$ м/с, направо. Для обруча 2: $\omega_2 R = V_2$, $w_2 = \dfrac{u_2 + V_2}{2} = \dfrac{1 + 0{,}2}{2} = 0{,}6$ м/с, направо.



Скорости центров и «скорости вращения» ωR сближаются и в момент $t_* = 0{,}2$ с выравниваются.

6. Время скольжения и повторный удар. Обруч 1 разгоняется с ускорением $\mu g = 2$ м/с^2: $t_* = (w_1 - u_1)/(\mu g) = 0{,}2$ с; обруч 2 тормозится с тем же ускорением и за то же время приходит к 0,6 м/с. Расстояние между обручами за это время растёт, а после — не меняется, так что второго столкновения нет, и ответ пункта 3 окончательный.

Проверка. Для обруча 1 скорость точки контакта $u_1 + \mu g\, t - (\omega_1 R - \mu g\, t) = -0{,}8 + 4t$ обращается в ноль при $t = 0{,}2$ с, как и должно быть. Для сил: $\mu g = V_1^2/R = 2$ м/с^2 даёт $a_A = \sqrt{20}$ и $a_B = 2$, отношение $\sqrt{5}$. Предел: при $V_2 = V_1$ удара нет, а $w = V_1$ — обруч катится как раньше.

Ответ. 1) $u_1 = 0{,}2$ м/с, направо; $u_2 = 1$ м/с, направо; 2) $\mu = 0{,}2$; 3) $w_1 = w_2 = 0{,}6$ м/с, направо.