Излучающая заряженная частица в магнитном поле

Задача 4. [Физтех 2025/26, 11 класс, варианты 11-05–11-06, задача 4] Частице массой m и зарядом $q > 0$ в вакуумной камере сообщили кинетическую энергию E_0. Скорость частицы перпендикулярна силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией B. Частица излучает электромагнитные волны. Средняя мощность излучения движущейся с ускорением a нерелятивистской частицы определяется по формуле Лармора:

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3},$$

где ε_0 — электрическая постоянная, c — скорость света в вакууме. Движение частицы нерелятивистское. За один оборот относительное изменение радиуса кривизны траектории незначительно.

1. Найдите начальный радиус кривизны траектории частицы R_0.
2. Считая излучение непрерывным, найдите путь L, пройденный частицей к моменту, когда радиус кривизны её траектории уменьшится в 3 раза.
3. Считая излучение дискретным (испускаются фотоны, каждый с порцией энергии $h\nu$, где h — постоянная Планка, ν — частота излучения, равная частоте вращения частицы), найдите, на какую минимальную величину $|\Delta\Phi|$ уменьшится при испускании фотона магнитный поток через поверхность, натянутую на уменьшающийся по размерам виток траектории частицы.

Считать, что $\dfrac{q}{2\pi m}Bh \ll E_0$. Ответы выразить через m, q, B, E_0, c, h, ε_0.

▲ **Решение. Что происходит.** В магнитном поле частица идёт по окружности, а вращаясь с ускорением, излучает и теряет энергию. Скорость падает, радиус $R = mV/(qB)$ уменьшается, и окружность медленно закручивается в спираль (рис. 3). Потери за оборот малы, поэтому каждый оборот можно считать окружностью, а мощность — брать по формуле Лармора. В пункте 3 энергия теряется порциями $h\nu$, и из них находится

порция потока.

Обозначения. V — скорость, $\omega = qB/m$ — угловая скорость вращения, s — пройденный путь, γ — скорость убывания радиуса (появится ниже), Φ — поток через виток.

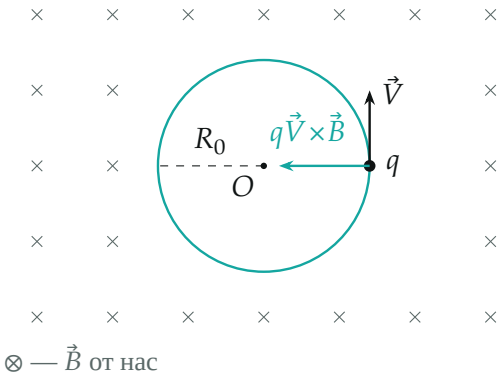


Рис. 1. Поясняющий рисунок: заряд движется по окружности, магнитная сила направлена к центру

Пункт 1. Начальный радиус.

1. Скорость $V_0 = \sqrt{2E_0/m}$. Магнитная сила qV_0B перпендикулярна скорости и создаёт центростремительное ускорение (второй закон Ньютона по нормали):

$$\frac{mV_0^2}{R_0} = qV_0B \quad \Rightarrow \quad R_0 = \frac{mV_0}{qB} = \frac{\sqrt{2mE_0}}{qB}.$$

Пункт 2. Путь до уменьшения радиуса втрое.

2. Мощность излучения. При движении по окружности радиуса R ускорение $a = V^2/R$, а из $mV^2/R = qVB$ следует $V = qBR/m$, то есть $a = \omega V = \dfrac{q^2B^2}{m^2}R$. По формуле Лармора

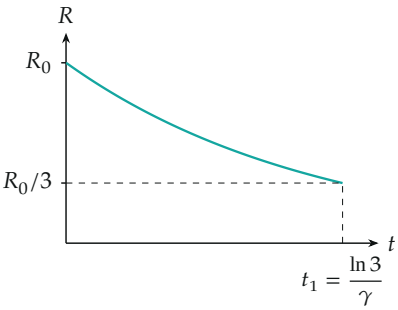
$$P = \frac{q^2a^2}{6\pi\varepsilon_0c^3} = \frac{q^6B^4R^2}{6\pi\varepsilon_0c^3m^4}.$$

3. Закон изменения радиуса. Кинетическая энергия $E = \dfrac{mV^2}{2} =$

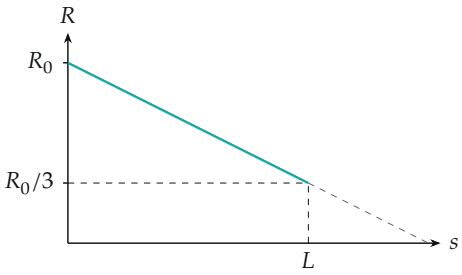
$\frac{q^2B^2R^2}{2m}$, и убывает она со средней мощностью излучения: $\frac{dE}{dt} = -P$. Подставим E и P:

$$\frac{q^2B^2}{m}\,R\,\frac{dR}{dt} = -\frac{q^6B^4R^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^4} \quad\Rightarrow\quad \frac{dR}{dt} = -\gamma R, \qquad \gamma = \frac{q^4B^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^3}.$$

Радиус убывает по экспоненте, $R = R_0 e^{-\gamma t}$ (рис. 2а): чем меньше радиус, тем медленнее его убыль.



(а) $R = R_0 e^{-\gamma t}$



(б) $R = R_0 - \frac{\gamma}{\omega}s$

Рис. 2. Радиус от времени (а) и от пути (б): по времени — экспонента, по пути — прямая

4. Путь. За малое время частица проходит $ds = V\,dt = \omega R\,dt$, а радиус уменьшается на $dR = -\gamma R\,dt$. Отсюда

$$\frac{dR}{ds} = -\frac{\gamma}{\omega} = \text{const}:$$

радиус уменьшается линейно по пути (рис. 2б), и до значения $R_0/3$, то есть на $\frac{2}{3}R_0$, частица проходит

$$L = \frac{2}{3}R_0 \cdot \frac{\omega}{\gamma} = \frac{2}{3}R_0 \cdot \frac{qB}{m} \cdot \frac{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^3}{q^4B^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 c^3 m^2 R_0}{q^3 B}.$$

Подставляем R_0 из п. 1:

$$L = \frac{4\pi\varepsilon_0 c^3 m^2 \sqrt{2mE_0}}{q^4 B^2}.$$

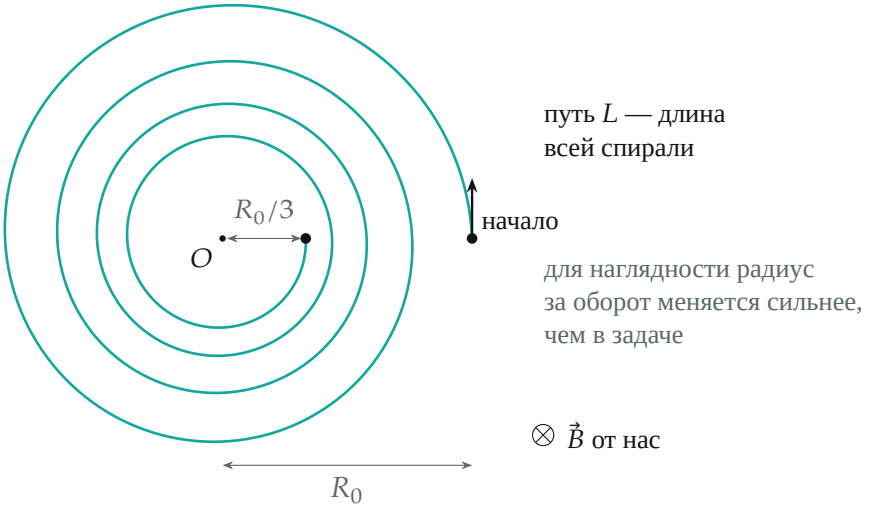


Рис. 3. Траектория: заряд идёт по спирали к центру; длина спирали от R_0 до $R_0/3$ равна L

Пункт 3. Потеря потока при излучении фотона.

5. Поток через виток. Поверхность, натянутая на окружность радиуса R, пронизана однородным полем: $\Phi = \pi R^2 B$. Выразим R^2 через энергию частицы, $E = \dfrac{q^2 B^2 R^2}{2m}$:

$$\Phi = \frac{2\pi m}{q^2 B} E, \qquad |\Delta\Phi| = \frac{2\pi m}{q^2 B} |\Delta E|$$

То есть поток пропорционален энергии.

6. Энергия фотона. Частота излучения равна частоте вращения $\nu = \omega/(2\pi) = qB/(2\pi m)$ и не зависит от радиуса и энергии, поэтому все фотоны уносят одну и ту же энергию $h\nu = hqB/(2\pi m)$. По условию

она много меньше E_0, значит, за один фотон R и ν почти не меняются. Минимальная потеря — излучение одного фотона:

$$|\Delta\Phi| = \frac{2\pi m}{q^2 B} \cdot \frac{hqB}{2\pi m} = \frac{h}{q}.$$

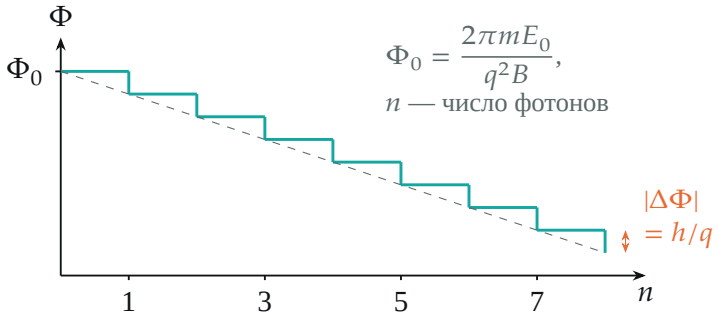


Рис. 4. Поток через виток убывает ступенями одинаковой высоты h/q — по одной на каждый фотон

Обратите внимание. Мощность P зависит от радиуса ($P \propto R^2$), поэтому убыль dR/dt пропорциональна R, а не постоянна: путь удобно находить не через время, а через dR/ds. Порция потока h/q не зависит ни от B, ни от энергии, ни от массы частицы.

Проверка. Размерность: γ — обратные секунды (P — ватт, E — джоуль); ω/γ безразмерно, поэтому L — длина; h/q — вебер (Дж · с/Кл). Второй способ для L: тормозящая «сила» излучения $P/V = \dfrac{q^5 B^3 R}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^3}$ даёт $\dfrac{dE}{ds} = -\dfrac{P}{V}$, а $\dfrac{dE}{ds} = \dfrac{q^2B^2R}{m}\dfrac{dR}{ds}$, откуда $\dfrac{dR}{ds} = -\dfrac{q^3B}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^2}$ — та же постоянная, что в п. 4. Численное интегрирование потерь энергии при условных числах совпало с формулой для L до 10^{-5}. Смысл: энергия уходит квантами, и поток через виток меняется порциями h/q.

Ответ. 1) $R_0 = \dfrac{\sqrt{2mE_0}}{qB}$; 2) $L = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 c^3 m^2 \sqrt{2mE_0}}{q^4 B^2}$; 3) $|\Delta\Phi| = \dfrac{h}{q}$.