Определение высоты звезды зеркалом и пластиной

Задача 5. [Физтех 2025/26, 11 класс, варианты 11-05–11-06, задача 5] Для определения высоты звезды S над горизонтом турист использует систему, схема которой приведена на рисунке. Плоское зеркало З и тонкая полупрозрачная плоскопараллельная пластина П, частично отражающая и частично пропускающая свет, составляют двугранный угол $\varphi = 0{,}54$ рад (см. рис.). Система также включает зрительную трубу с горизонтальной оптической осью, состоящую из двух тонких линз — объектива с фокусным расстоянием $F = 13$ см и окуляра. Через окуляр турист наблюдает в фокальной плоскости объектива одновременно два изображения — удалённого предмета G на горизонте и звезды S после последовательного отражения её в зеркале З и пластине П. Расстояние между этими изображениями равно $\Delta = 13$ мм.

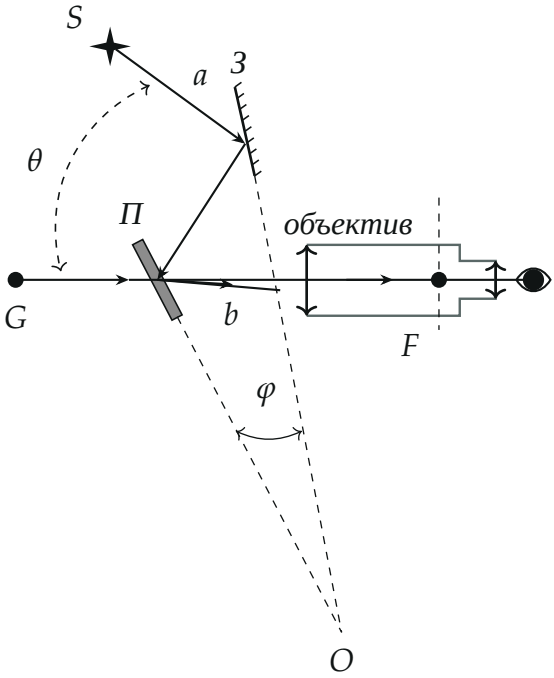


Рис. 1. Схема из условия: ход лучей от звезды S (зеркало З, пластина П, объектив, окуляр) и от предмета G на горизонте

1. Для лучей, падающих от звезды на зеркало З в плоскости, перпендикулярной ребру двугранного угла, определите угол β между первоначальным направлением распространения a и их направлением b после отражения от зеркала и пластины П.
2. На какой угол α нужно повернуть зеркало З относительно оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, чтобы изображение звезды совпало с изображением предмета G?
3. Найдите угловую высоту θ звезды S над горизонтом.

Для малых углов ($\gamma < 0{,}15$ рад) считать $\operatorname{tg}\gamma \approx \sin\gamma \approx \gamma$. Ответы дать в радианах.

▲ **Решение. Что происходит.** Свет звезды отражается от зеркала З, потом от пластины П и идёт в трубу, а свет горизонта G проходит сквозь пластину прямо вдоль оси. Двойное отражение поворачивает луч на удвоенный угол между зеркалами — отсюда связь высоты звезды с φ. Но направления b и оси не совпадают точно, и в фокальной плоскости объектива изображения звезды и G раздвинуты на Δ; зеркало З поворачивают, пока они не сольются. Законы: закон отражения и сбор параллельного пучка тонкой линзой в фокальной плоскости.

Обозначения. Направление луча задаём углом с горизонталью, отсчитанным против часовой стрелки; μ_1 и μ_2 — такие же углы линий зеркала З и пластины П в плоскости рисунка; d_a, d_m, d_b — направления луча до зеркала, между зеркалом и пластиной, после пластины; ε — угол между b и осью трубы.

Пункт 1. Угол между a и b.

1. Закон отражения. Если зеркало образует с горизонталью угол μ, а луч идёт под углом d, то угол между лучом и зеркалом равен $d - \mu$, и по закону отражения отражённый луч составляет с зеркалом тот же угол по другую сторону: $d' - \mu = -(d - \mu)$, то есть

$$d' = 2\mu - d.$$

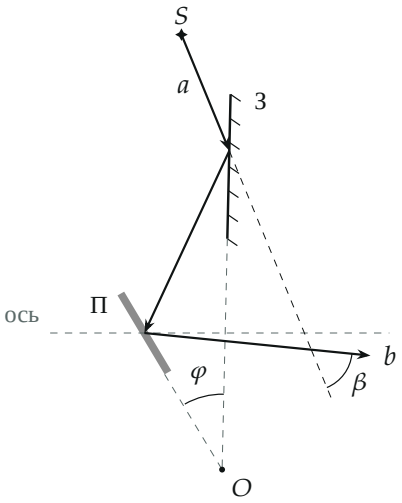
2. Два отражения. От зеркала 3 и затем от пластины П:

$$d_m = 2\mu_1 - d_a, \qquad d_b = 2\mu_2 - d_m = d_a + 2(\mu_2 - \mu_1).$$

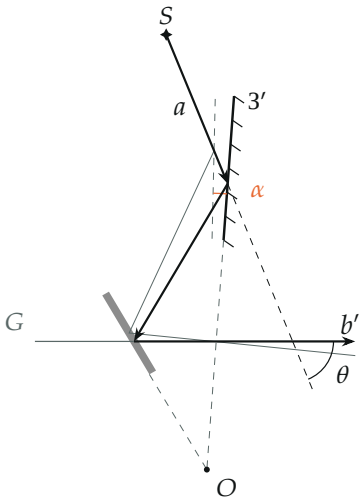
Разность $\mu_2 - \mu_1$ — угол φ между зеркалом и пластиной (рис. 2а). Поэтому луч поворачивается на

$$\beta = d_b - d_a = 2\varphi = 2 \cdot 0{,}54 = 1{,}08 \text{ рад}.$$

Результат не зависит от того, как зеркало и пластина расположены относительно горизонта, и от направления самого луча: важен только угол между ними.



(а) двугранный угол φ



(б) 3 повёрнуто на α: b' идёт вдоль оси

Рис. 2. Ход луча в двугранном угле (З — зеркало, П — пластина): (а) исходное положение, угол между a и b равен 2φ; (б) зеркало 3 повёрнуто вокруг O на α, луч b′ идёт вдоль оси. Чертёж построен по числам задачи; угол α мал и на рисунке едва заметен

Пункт 2. Поворот зеркала.

3. Что видно в трубе. Объектив собирает параллельный пучок в одну точку фокальной плоскости; если пучок идёт под малым углом γ к оси, точка удалена от оси на $F \operatorname{tg}\gamma \approx F\gamma$ (рис. 3). Лучи от G идут вдоль оси и

собираются в F. Лучи от звезды после пластины идут под углом ε к оси (рис. 1: b идёт ниже оси) и собираются на расстоянии Δ от F:

$$\Delta = F\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{F} = \frac{1{,}3\text{ см}}{13\text{ см}} = 0{,}10\text{ рад}.$$

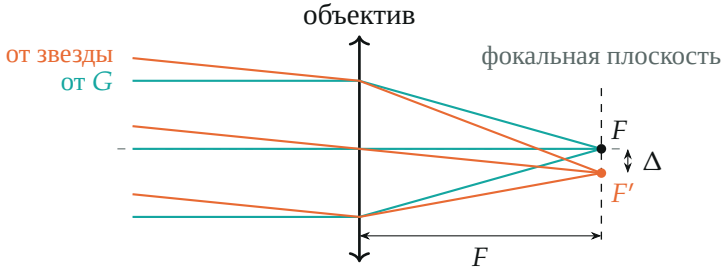


Рис. 3. Фокальная плоскость объектива: пучок от G идёт вдоль оси и собирается в F, пучок от звезды идёт под углом ε и собирается в F' на расстоянии $\Delta = F\varepsilon$ от оси

4. Поворот зеркала. Из п. 2 $d_b = d_a + 2(\mu_2 - \mu_1)$: при повороте 3 вокруг O на α (пластина неподвижна) угол φ меняется на α, а направление b — на 2α. Чтобы b пошёл вдоль оси, его надо повернуть на ε; для этого 3 поворачивают на тот угол, при котором φ растёт (по часовой стрелке на рис. 2б):

$$2\alpha = \varepsilon = \frac{\Delta}{F} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\Delta}{2F} = \frac{1{,}3}{2 \cdot 13} = 0{,}05\text{ рад}.$$

Тогда изображения звезды и G совпадают.

Пункт 3. Высота звезды.

5. Угол двойного отражения при совпавших изображениях. Теперь b' идёт вдоль оси, то есть параллельно лучам от G: $d_{b'} = 0$. Угол между зеркалом и пластиной стал $\varphi + \alpha$, и по п. 2

$$0 = d_a + 2(\varphi + \alpha) \quad \Rightarrow \quad d_a = -2(\varphi + \alpha).$$

Луч от звезды идёт вниз под углом $2(\varphi + \alpha)$ к горизонту, поэтому звезда

над горизонтом на тот же угол (рис. 2б):

$$\theta = 2\varphi + 2\alpha = 1{,}08 + 0{,}10 = 1{,}18 \text{ рад } (\approx 67{,}6^\circ).$$

Обратите внимание. Поворот зеркала на α поворачивает луч на 2α: поэтому $\alpha = \Delta/(2F)$, а не Δ/F. Угол 2φ — угол между направлениями лучей до и после двух отражений, а не между зеркалами. Высота звезды — угол между лучом от неё и лучом от горизонта, который идёт горизонтально.

Проверка. Углы безразмерны, Δ/F безразмерно. Предел $\Delta = 0$ (изображения совпали сразу): $\alpha = 0$, $\theta = 2\varphi$. Тот же результат без поворота: $d_b = -\varepsilon = d_a + 2\varphi$, откуда $\theta = -d_a = 2\varphi + \varepsilon = 1{,}08 + 0{,}10 = 1{,}18$ рад. Точное $\operatorname{tg}\varepsilon = 0{,}1003$ отличается от ε на 0,3 %, что укладывается в условие $\gamma < 0{,}15$. Численное построение хода луча по закону отражения с этими числами даёт после поворота $d_{b'} = 0$. Смысл: высоту звезды дают угол между зеркалом и пластиной (при двойном отражении он удваивается) и малая поправка, которую находят по положению изображений в фокальной плоскости.

Ответ. 1) $\beta = 2\varphi = 1{,}08$ рад; 2) $\alpha = \dfrac{\Delta}{2F} = 0{,}05$ рад; 3) $\theta = 2\varphi + \dfrac{\Delta}{F} = 1{,}18$ рад $(\approx 67{,}6^\circ)$.