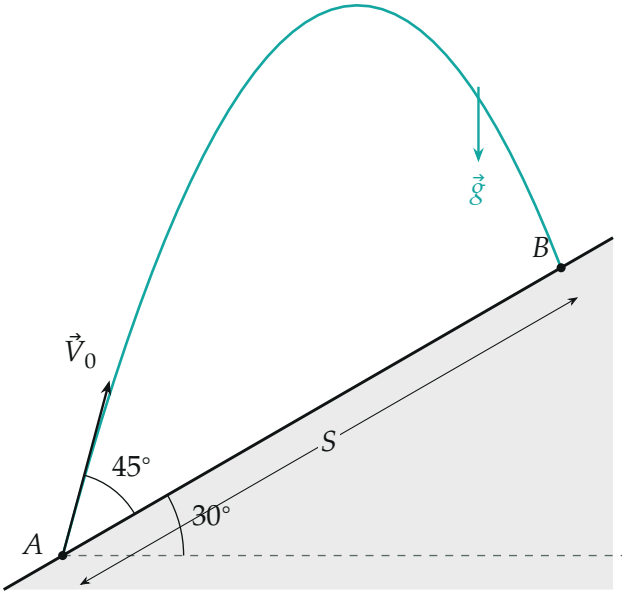
# Мяч на плоском склоне под углом к склону

**Задача 2.** [Физтех 2025/26, 9 класс, вариант 09-01, задача 2] На плоском склоне, образующем с горизонтальной плоскостью угол $30°$, бросают мяч вверх по склону. Точка старта находится на поверхности склона. Вектор начальной скорости мяча образует со склоном угол $45°$. Через $T = 4$ с мяч падает на склон. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

1. Найдите модуль $V_0$ начальной скорости мяча.
2. На каком расстоянии $S$ от точки старта мяч упал на склон?
3. Найдите наименьший радиус $R$ кривизны траектории мяча.

▲ **Решение.** **Что происходит.** После броска на мяч действует только сила тяжести, поэтому ускорение $\vec{g}$ постоянно и по величине, и по направлению. Для движения с постоянным ускорением перемещение за время $T$ записывается одной векторной формулой, а условие «мяч упал на склон» означает, что конец вектора перемещения лежит на плоскости склона. Это даёт уравнение на $V_0$ без единой траекторной формулы: проектируем перемещение на нормаль к склону. Радиус кривизны найдём из нормального ускорения: $R = v^2/a_n$, где $a_n$ — составляющая $\vec{g}$, перпендикулярная скорости.



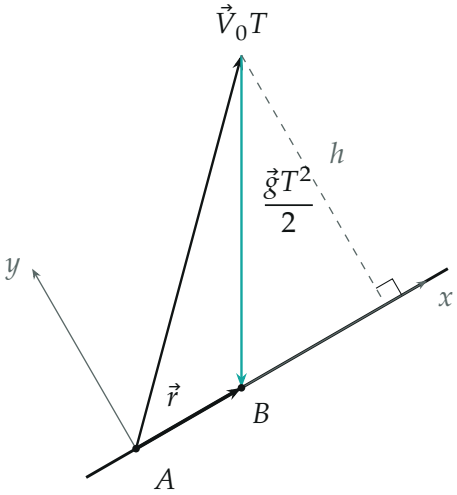

*Бросок с поверхности склона: A — точка старта, B — точка падения; траектория построена по найденным ниже значениям*

**Обозначения.** $\alpha = 30°$ — угол склона, $\beta = 45°$ — угол между $\vec{V}_0$ и склоном (с горизонтом $\vec{V}_0$ составляет $\alpha + \beta = 75°$); ось $x$ идёт вдоль склона вверх, ось $y$ — по нормали от склона; $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$ — перемещение мяча за время $T$.

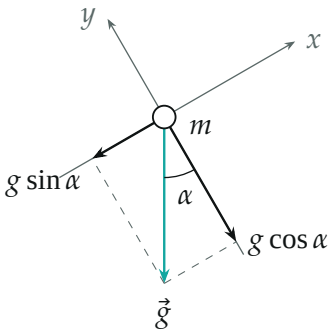
**1. Перемещение мяча.** Движение с постоянным ускорением:

$$\vec{r} = \vec{V}_0 T + \frac{\vec{g}\,T^2}{2}.$$

Это правило сложения векторов: от точки $A$ откладываем $\vec{V}_0 T$ вдоль начальной скорости, затем $\vec{g}T^2/2$ вертикально вниз; конец второго вектора — точка падения $B$ (см. рисунок).




*Векторы $\vec{V}_0T$, $\vec{g}T^2/2$ и перемещение $\vec{r}$ вдоль склона, оси $x$ (вдоль склона) и $y$ (по нормали); $h$ — общая «высота» над склоном: на неё $\vec{V}_0T$ поднимает конец, а $\vec{g}T^2/2$ опускает обратно*




*Мяч $m$ в полёте: действует только сила тяжести; $\vec{g}$ составляет угол $\alpha$ с осью $y$ (нормалью к склону), поэтому $g_y = -g\cos\alpha$, $g_x = -g\sin\alpha$ — оба против осей*

**2. Модуль $V_0$ (пункт 1).** Мяч падает на склон, поэтому вектор $\vec{r}$ лежит в плоскости склона, и его проекция на нормаль равна нулю. Проекция $\vec{V}_0T$ на нормаль — это $V_0T\sin\beta$ (угол со склоном $\beta$), проекция $\vec{g}T^2/2$

— это $-(gT^2/2)\cos\alpha$ (вектор $\vec{g}$ составляет с нормалью к склону угол $\alpha$). Сумма равна нулю:

$$V_0 T\sin\beta = \frac{gT^2}{2}\cos\alpha \;\Rightarrow\; V_0 = \frac{gT\cos\alpha}{2\sin\beta} = \frac{10\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$V_0 = 10\sqrt{6}\ \text{м/с} \approx 24{,}5\ \text{м/с}.$$

**3. Дальность $S$ (пункт 2).** Проектируем равенство $\vec{r} = \vec{V}_0 T + \vec{g}T^2/2$ на склон: проекция $\vec{V}_0 T$ равна $V_0 T\cos\beta$, проекция $\vec{g}T^2/2$ — $-(gT^2/2)\sin\alpha$ (вдоль склона $\vec{g}$ направлено вниз):

$$S = V_0 T\cos\beta - \frac{gT^2}{2}\sin\alpha = 10\sqrt{6}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{10\cdot 16}{2}\cdot\frac{1}{2},$$

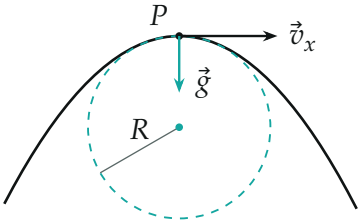
$$S = 40\sqrt{3} - 40 = 40(\sqrt{3}-1) \approx 29{,}3\ \text{м}.$$

**4. Радиус кривизны (пункт 3).** Радиус кривизны траектории $R = v^2/a_n$, где $a_n$ — составляющая ускорения $\vec{g}$, перпендикулярная скорости. Пусть $\theta$ — угол между скоростью и горизонтом. Тогда $a_n = g\cos\theta$. Горизонтальная составляющая скорости не меняется (по горизонтали сил нет): $v\cos\theta = v_x = \text{const}$, откуда $v = v_x/\cos\theta$ и

$$R = \frac{v_x^2}{g\cos^3\theta} \geqslant \frac{v_x^2}{g}.$$

Наименьшее значение — при $\theta = 0$, то есть в высшей точке траектории, где скорость горизонтальна и минимальна, а $\vec{g}$ целиком направлено по нормали (см. рисунок). Мяч эту точку проходит: время подъёма $t_* = V_0\sin 75^\circ/g = (3+\sqrt{3})/2 \approx 2{,}37\ \text{с} < T$. Горизонтальная составляющая $v_x = V_0\cos 75^\circ = 10\sqrt{6}\,(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4 = 5(3-\sqrt{3}) \approx 6{,}34$ м/с, значит,

$$R_{\min} = \frac{v_x^2}{g} = \frac{25(3-\sqrt{3})^2}{10} = 15(2-\sqrt{3})\ \text{м} \approx 4{,}0\ \text{м}.$$




*Высшая точка $P$ траектории и окружность кривизны радиуса $R$; в $P$ скорость горизонтальна, а $\vec{g}$ перпендикулярно ей*

**Обратите внимание.** Угол 45° в условии — угол со *склоном*, к горизонту скорость направлена под 75°: именно от этого зависит $v_x$. Радиус кривизны меняется вдоль траектории: у точки броска он велик ($V_0^2/(g\cos 75^\circ) \approx 230$ м), потому что скорость там почти вертикальна и нормальное ускорение мало.

**Проверка.** Составляющие $\vec{V}_0$: $V_{0x} = V_0\cos 75^\circ \approx 6{,}34$ м/с, $V_{0y} = V_0\sin 75^\circ \approx 23{,}66$ м/с. При $t = 4$ с получаем $x \approx 25{,}4$ м, $y = 23{,}66\cdot 4 - 5\cdot 16 \approx 14{,}6$ м, $y/x \approx 0{,}577 = \operatorname{tg} 30^\circ$ — мяч на склоне, а $\sqrt{x^2+y^2} \approx 29{,}3$ м совпадает с $S$.

Смысл: падение на наклонную плоскость удобно решать проекциями на её оси, а траектория круче всего изгибается там, где скорость меньше всего.

**Ответ.** 1) $V_0 = 10\sqrt{6}$ м/с $\approx 24{,}5$ м/с; 2) $S = 40(\sqrt{3}-1)$ м $\approx 29{,}3$ м; 3) $R = 15(2-\sqrt{3})$ м $\approx 4{,}0$ м.