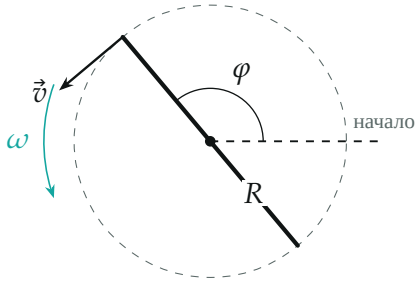
Винт модели вертолёта раскручивается

Задача 1. [Физтех 2025/26, 9 класс, вариант 09-03, задача 1] Несущий винт модели вертолёта вращается из состояния покоя так, что скорость концов лопастей растёт со временем по линейному закону $v = a_\tau t$. Радиус лопастей $R = 0{,}5$ м. Два последовательных поворота винта на углы $\varphi_1 = 2$ рад и $\varphi_2 = 4{,}5$ рад происходят за промежутки времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 3$ с соответственно.

1. Найдите тангенциальное ускорение a_τ.
2. Какое число N оборотов совершит винт после начала вращения к тому моменту, когда концы лопастей будут двигаться со скоростью $v_1 = 2$ м/с?

▲ **Решение. Что происходит.** Скорость концов лопастей растёт линейно, значит, и угловая скорость винта $\omega = v/R$ растёт линейно: вращение равноускоренное с постоянным угловым ускорением ε. Задача устроена так же, как задача о мотоциклисте на двух отрезках пути: роль пути играет угол поворота, роль скорости — угловая скорость, роль ускорения — угловое ускорение. Главный факт: при равноускоренном вращении *средняя угловая скорость на повороте равна угловой скорости в середине промежутка времени*. Два поворота дают две такие скорости, а их разность даёт ε.

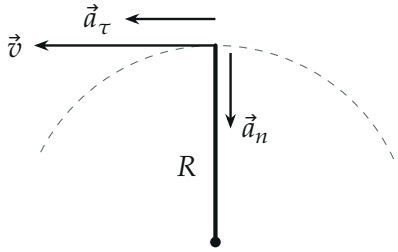


Вид сверху: винт повернулся на угол φ от начального положения; скорость конца лопасти направлена по касательной

Обозначения. Время t отсчитываем от начала вращения ($\omega = 0$); t_0 — момент начала первого поворота; ε — угловое ускорение; ω_1, ω_2 — средние угловые скорости на первом и втором поворотах.

1. Связь линейных и угловых величин. Конец лопасти движется по окружности радиуса R, поэтому $v = \omega R$. Из $v = a_\tau t$ получаем $\omega = \dfrac{a_\tau}{R}\, t = \varepsilon t$, где

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{R}, \qquad \varphi(t) = \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad \text{(угол от начала вращения)}.$$



Конец лопасти: $\vec{v}$ и $\vec{a}_\tau$ — по касательной (скорость растёт, они сонаправлены), $\vec{a}_n$ — к центру; на углы и обороты влияет только a_τ

2. Средние угловые скорости. На первом повороте (от t_0 до $t_0 + t_1$) угол равен площади трапеции под графиком $\omega(t)$: $\varphi_1 = \omega(t_0 + t_1/2)\, t_1$. Значит, в момент $t_0 + t_1/2$ угловая скорость $\omega_1 = \varphi_1/t_1 = 1$ рад/с. Для второго поворота (он начинается в момент $t_0 + t_1$) в момент $t_0 + t_1 + t_2/2$ угловая скорость $\omega_2 = \varphi_2/t_2 = 1{,}5$ рад/с.

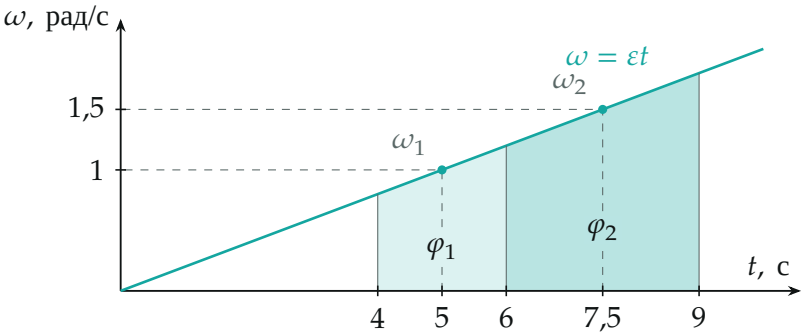


График угловой скорости: площади трапеций — углы φ_1 и φ_2; серединам промежутков соответствуют ω_1 и ω_2

3. Угловое ускорение и a_τ (пункт 1). Середины двух поворотов разделены интервалом $\Delta t = (t_1 + t_2)/2 = 2{,}5$ с, поэтому

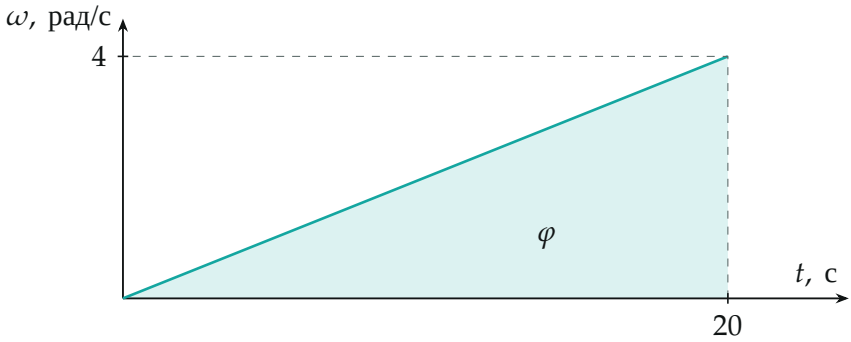
$$\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{(t_1 + t_2)/2} = \frac{1{,}5 - 1}{2{,}5} = 0{,}2 \text{ рад/с}^2,$$

$$a_\tau = \varepsilon R = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Момент начала первого поворота: $\omega_1 = \varepsilon\,(t_0 + t_1/2)$, откуда $t_0 = \omega_1/\varepsilon - t_1/2 = 5 - 1 = 4$ с.

4. Число оборотов (пункт 2). Скорости $v_1 = 2$ м/с соответствует угловая скорость $\omega_1' = v_1/R = 4$ рад/с, время разгона $t = \omega_1'/\varepsilon = 20$ с. Угол поворота от начала вращения — площадь треугольника под графиком:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\omega_1'^{\,2}}{2\varepsilon} = \frac{16}{0{,}4} = 40 \text{ рад}, \qquad N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{40}{2\pi} \approx 6{,}4.$$



Угол от начала вращения до $v_1 = 2$ м/с — площадь треугольника под графиком угловой скорости

Обратите внимание. Угловая скорость связана со скоростью конца лопасти формулой $\omega = v/R$ только в радианах в секунду; число оборотов получается делением угла в радианах на 2π, а не на π. Поворот на 4,5 рад — это уже больше половины оборота; на формулах это не сказывается, потому что угол отсчитывается непрерывно, без «обнуления» после каждого оборота.

Проверка. Углы от начала вращения $\varphi(t) = 0{,}1\,t^2$ рад: $\varphi(4) = 1{,}6$, $\varphi(6) = 3{,}6$, $\varphi(9) = 8{,}1$ рад. Разности $3{,}6 - 1{,}6 = 2$ рад и $8{,}1 - 3{,}6 = 4{,}5$ рад — как в условии. Скорость конца лопасти в момент $t = 20$ с: $a_\tau t = 0{,}1 \cdot 20 = 2$ м/с, как задано. Размерность: $[a_\tau / R] = \text{м/с}^2/\text{м} = 1/\text{с}^2$, радиан безразмерен.

Смысл: линейный рост скорости конца лопасти означает постоянное угловое ускорение, и двух поворотов достаточно, чтобы найти и его, и момент начала первого поворота.

Ответ. 1) $a_\tau = 0{,}1$ м/с^2; 2) $N \approx 6{,}4$.