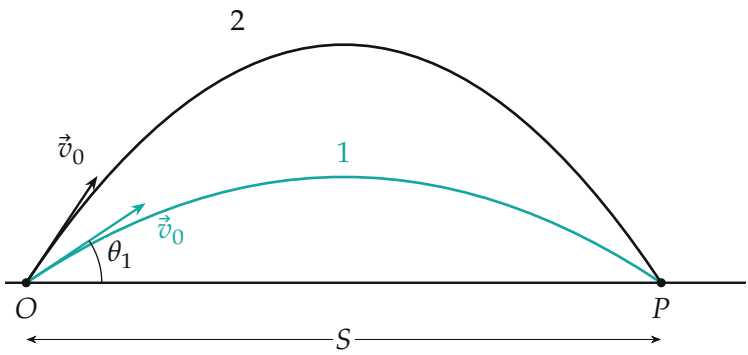
Осколки фейерверка падают в одну точку

Задача 2. [Физтех 2025/26, 9 класс, вариант 09-03, задача 2] Лежащий на горизонтальной площадке фейерверк разорвался на множество осколков, которые летят с одинаковой по модулю начальной скоростью во всех направлениях. В точку, находящуюся на расстоянии $S = 30$ м от места разрыва, падают два осколка: второй через $\tau = 1$ с после первого. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

1. В течение какого времени T_1 первый осколок находился в полёте?
2. На каком максимальном расстоянии L от места разрыва осколки упадут на площадку?
3. Найдите наименьший радиус R кривизны траектории первого осколка.

▲ **Решение. Что происходит.** Каждый осколок — тело, брошенное с одной и той же скоростью v_0 под своим углом к горизонту, сопротивления нет. Два осколка упали в одну точку, поэтому у них разные углы и разное время полёта: один пролетел по пологой дуге быстро, другой — по крутой дольше. Для цели на расстоянии S и времени полёта T начальная скорость выражается через S и T (формула ниже); раз скорость у осколков одна, их времена связаны, и отсюда находится T_1. Наибольшее расстояние по площадке — дальность броска под 45°. Радиус кривизны минимален в верхней точке траектории, где скорость горизонтальна, а $\vec{g}$ перпендикулярно ей.

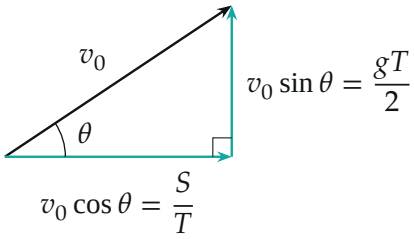


Траектории двух осколков с одинаковой по модулю начальной скоростью, упавших в точку P; осколок 1 летит ниже и быстрее, осколок 2 — выше и дольше; θ_1 — угол броска первого

Обозначения. v_0 — общая начальная скорость, θ — угол броска, T_1 и $T_2 = T_1 + \tau$ — времена полёта первого и второго осколков, v_x — горизонтальная составляющая скорости.

1. Скорость через дальность и время полёта. Горизонтально осколок летит равномерно: $S = v_0 \cos\theta\, T$. По вертикали он вернулся на высоту разрыва, поэтому $0 = v_0 \sin\theta\, T - gT^2/2$, то есть $v_0 \sin\theta = gT/2$. Возведём оба равенства $v_0 \cos\theta = S/T$ и $v_0 \sin\theta = gT/2$ в квадрат и сложим:

$$v_0^2 = \frac{S^2}{T^2} + \frac{g^2 T^2}{4}.$$



Начальная скорость осколка и её составляющие: по теореме Пифагора v_0^2 равно сумме квадратов катетов

2. Время полёта T_1 (пункт 1). Запишем это для обоих осколков и приравняем (скорость одна и та же):

$$\frac{S^2}{T_1^2} + \frac{g^2 T_1^2}{4} = \frac{S^2}{T_2^2} + \frac{g^2 T_2^2}{4} \;\Rightarrow\; S^2\,\frac{T_2^2 - T_1^2}{T_1^2 T_2^2} = \frac{g^2}{4}\,(T_2^2 - T_1^2).$$

Времена разные, на $T_2^2 - T_1^2 \neq 0$ сокращаем: $T_1 T_2 = \dfrac{2S}{g} = 6\ \text{с}^2$. С учётом $T_2 = T_1 + \tau$:

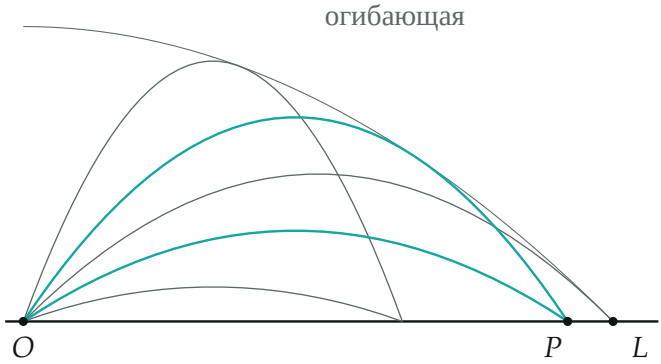
$$T_1^2 + T_1 - 6 = 0 \;\Rightarrow\; T_1 = 2\ \text{с}, \qquad T_2 = 3\ \text{с}$$

(отрицательный корень -3 с отброшен). Тогда $v_0^2 = \dfrac{900}{4} + \dfrac{100 \cdot 4}{4} = 325$ м^2/с^2, $v_0 \approx 18{,}0$ м/с. Углы бросков: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{v_0 \sin\theta}{v_0 \cos\theta} = \dfrac{gT^2}{2S}$, то есть $\operatorname{tg}\theta_1 = \dfrac{2}{3}$ ($\theta_1 \approx 33{,}7°$), $\operatorname{tg}\theta_2 = \dfrac{3}{2}$ ($\theta_2 \approx 56{,}3°$); углы дополняют друг друга до $90°$.

3. Наибольшее расстояние L (пункт 2). При скорости v_0 дальность на ровной площадке $\ell(\theta) = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$ (время полёта $2v_0 \sin\theta/g$, умноженное на $v_0 \cos\theta$). Осколки летят во все стороны, значит, есть и бросок под $45°$, где $\sin 2\theta = 1$:

$$L = \frac{v_0^2}{g} = \frac{325}{10} = 32{,}5 \text{ м}.$$

Дальше этой точки не долетает ни один осколок: границу достижимых точек (огибающую траекторий) показывает рисунок ниже.



Серые линии — траектории осколков при других углах, бирюзовые — два осколка из условия; серая огибающая касается всех траекторий и пересекает площадку в точке на расстоянии L

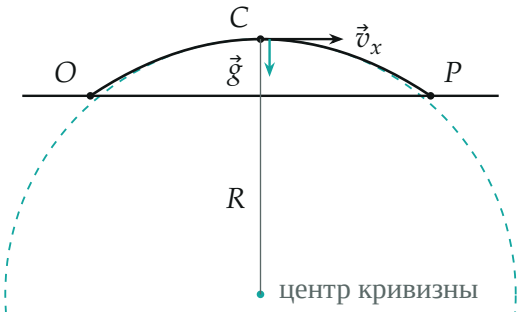
4. Радиус кривизны (пункт 3). Радиус кривизны $R = v^2/a_n$, где a_n — составляющая $\vec{g}$, перпендикулярная скорости. Пусть φ — угол скорости с горизонтом. Тогда $a_n = g\cos\varphi$, а горизонтальная составляющая

скорости постоянна: $v = v_x/\cos\varphi$. Значит,

$$R = \frac{v_x^2}{g\cos^3\varphi} \geqslant \frac{v_x^2}{g},$$

и минимум достигается при $\varphi = 0$ — в верхней точке (см. рисунок), где скорость горизонтальна, а $\vec{g}$ целиком направлено по нормали. У первого осколка $v_x = S/T_1 = 15$ м/с, поэтому

$$R = \frac{v_x^2}{g} = \frac{15^2}{10} = 22{,}5 \text{ м}.$$



Верхняя точка C траектории первого осколка и окружность кривизны радиуса R: центр лежит на вертикали через C, потому что в C нормаль к скорости вертикальна

Обратите внимание. Надо взять именно первый осколок: у второго $v_x = S/T_2 = 10$ м/с и $R = 10$ м, это меньше, но спрашивают про первый. Радиус кривизны не равен v_0^2/g: в верхней точке скорость не v_0, а только её горизонтальная часть v_x.

Проверка. Для второго осколка $v_0^2 = S^2/T_2^2 + g^2T_2^2/4 = 100 + 225 = 325$ м^2/с^2 — то же, что для первого, так что времена найдены верно. Высота подъёма первого осколка $g(T_1/2)^2/2 = 5$ м, дальность $v_xT_1 = 30$ м — точка P. Размерность: v^2/g — метры. Расстояние $L = 32{,}5$ м больше $S = 30$ м, как и должно быть.

Смысл: при одной скорости до заданной точки можно добраться двумя траекториями, времена полёта которых связаны $T_1 T_2 = 2S/g$; самая дальняя точка — та, где эти два пути сливаются в один.

Ответ. 1) $T_1 = 2$ с; 2) $L = 32{,}5$ м; 3) $R = 22{,}5$ м.