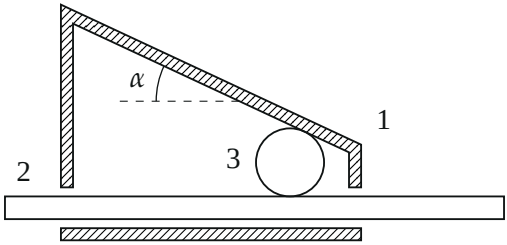
Фрикционный храповой механизм

Задача 5. [ИОШ 2014/15, 11 класс, задача 5] Храповым механизмом называется устройство, допускающее движение подвижных частей (зубчатых колёс, штоков и др.) только в одном направлении. Во фрикционных храповых механизмах силой, препятствующей движению, является сила трения. На рисунке представлен фрикционный храповой механизм, состоящий из полого наклонного корпуса 1 и направляющей 2, которая может перемещаться вправо или влево в отверстиях в корпусе. Между направляющей и наклонной гранью корпуса расположен маленький шарик 3. Объясните принцип работы механизма. В каком направлении — направо или налево — механизм препятствует движению направляющей? Какое трение — между шариком и направляющей, шариком и корпусом, направляющей и корпусом — обеспечивает его работу? Считая, что коэффициент трения между шариком и направляющей равен μ и меньше коэффициента трения между шариком и корпусом, определите, при каком угле α храповой механизм не позволит направляющей перемещаться в одном из направлений при любой действующей на неё внешней силе.



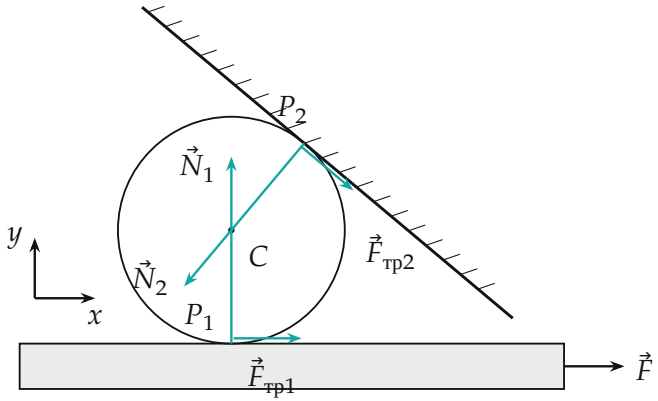
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на равновесие тела с трением покоя и заклинивание. Зазор между направляющей и наклонной гранью сужается вправо. Тянем направляющую вправо — трение тащит шарик туда же, в узкую часть зазора. Шарик упирается в грань, силы давления растут, растёт и предельное трение — шарик держит направляющую тем сильнее, чем сильнее тянут. Тянем влево — шарик уходит в широкую часть зазора, ничего не зажимает, и направляющая идёт свободно.

Значит, механизм не пускает направляющую *вправо*. Вопрос задачи — при каком наклоне грани шарик не проскользнёт, как бы сильно ни тянули.

Какое трение нужно. Работают два трения: шарика о направляющую и шарика о корпус. Без первого направляющая просто скользит под шариком, не увлекая его в клин. Без второго увлечённый шарик катится по направляющей и по грани, и направляющая уходит вправо, вращая его. Трение направляющей о корпус не нужно: оно одинаково мешает движению в обе стороны и одностороннего действия не даёт.

Обозначения. F — внешняя сила, тянущая направляющую вправо; $\vec{N}_1$, $\vec{F}_{тр1}$ — нормальная сила и сила трения, действующие на шарик со стороны направляющей (точка касания P_1); $\vec{N}_2$, $\vec{F}_{тр2}$ — со стороны грани корпуса (точка P_2); $\mu_к > \mu$ — коэффициент трения шарика о корпус; C — центр шарика. Шарик маленький: его силой тяжести пренебрегаем по сравнению с силами, растущими вместе с F.

1. Силы на шарик. Направляющая тянет шарик вправо — $\vec{F}_{тр1}$ направлена вправо. Без трения о грань шарик под действием $\vec{F}_{тр1}$ закрутился бы против часовой стрелки; трение о грань мешает этому повороту, поэтому $\vec{F}_{тр2}$ направлена вдоль грани вниз и вправо. Нормальные силы перпендикулярны поверхностям: $\vec{N}_1$ вверх, $\vec{N}_2$ под углом α к вертикали вниз и влево.



Силы, действующие на шарик, когда направляющую тянут вправо. Нормальные силы проходят через центр C.

2. Условия равновесия шарика. Второй закон Ньютона для шарика (он покоится) в проекциях на оси x (вправо) и y (вверх):

$$x:\ F_{\text{тр1}} - N_2 \sin\alpha + F_{\text{тр2}} \cos\alpha = 0, \qquad y:\ N_1 - N_2 \cos\alpha - F_{\text{тр2}} \sin\alpha = 0.$$

Правило моментов относительно центра C: нормальные силы проходят через центр, моменты дают только силы трения, обе с плечом r (радиус шарика) и противоположного направления вращения:

$$F_{\text{тр1}}\, r = F_{\text{тр2}}\, r \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тр1}} = F_{\text{тр2}}.$$

Направляющая тоже в равновесии: шарик действует на неё силой трения $F_{\text{тр1}}$ влево (третий закон Ньютона), которая и уравновешивает F, так что $F_{\text{тр1}} = F$.

3. Решаем систему. Подставляем $F_{\text{тр1}} = F_{\text{тр2}} = F$ в уравнение для x:

$$N_2 \sin\alpha = F(1 + \cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad N_2 = F\,\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{F}{\operatorname{tg}(\alpha/2)}.$$

Из уравнения для y:

$$N_1 = N_2 \cos\alpha + F \sin\alpha = F\,\frac{(1+\cos\alpha)\cos\alpha + \sin^2\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= F\,\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = N_2.$$

Все силы пропорциональны F: тянем сильнее — сильнее и зажим.

4. Условие, что шарик не проскользнёт. Трение покоя не больше предельного: $F_{\text{тр1}} \le \mu N_1$ и $F_{\text{тр2}} \le \mu_{\text{к}} N_2$. Отношение трения к нормальной силе в обеих точках одно:

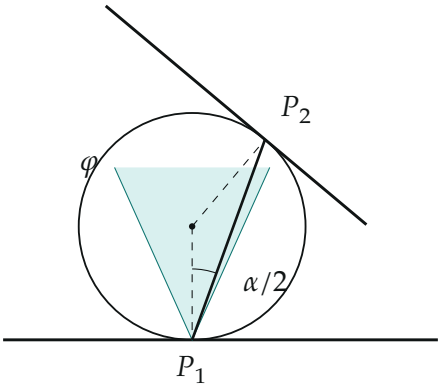
$$\frac{F_{\text{тр1}}}{N_1} = \frac{F_{\text{тр2}}}{N_2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Оно не зависит от F — если условие выполнено при какой-то силе, оно выполнено при любой. Так как $\mu < \mu_{\text{к}}$, первым начинает проскальзы-

вать контакт шарик–направляющая, и требование одно:

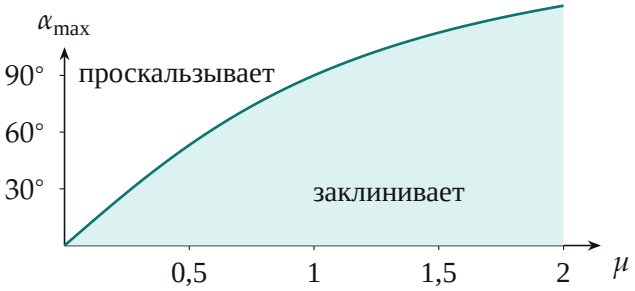
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \le \mu \quad \Rightarrow \quad \alpha \le 2\operatorname{arctg}\mu.$$

Второй способ: два тела касания. На шарик действуют только две полные силы реакции (каждая — сумма нормальной силы и трения), приложенные в P_1 и P_2. Тело под действием двух сил в равновесии, только если они направлены навстречу друг другу по одной прямой — по хорде P_1P_2. Треугольник CP_1P_2 равнобедренный ($CP_1 = CP_2 = r$), угол при C равен $180° - \alpha$ (между нормалями к сторонам угла α), значит, хорда составляет с каждым радиусом угол $\alpha/2$. Полная реакция отклонена от нормали не больше чем на угол трения $\varphi = \operatorname{arctg}\mu$, поэтому шарик держится при $\alpha/2 \le \varphi$ — тот же ответ.



Хорда P_1P_2 отклонена от нормали на $\alpha/2$. Пока она внутри конуса трения (бирюзовый, полуугол $\varphi = \operatorname{arctg}\mu$), шарик не проскальзывает.

Обратите внимание. Условие не содержит силу F: если угол подходящий, механизм держит любую силу (пока не разрушится материал). При большем угле шарик проскальзывает уже при малой силе — механизм не работает вовсе. Промежуточного «держит до какой-то силы» нет.



Наибольший угол $\alpha_{max} = 2\,\mathrm{arctg}\,\mu$, при котором механизм заклинивает. Ниже кривой — заклинивает при любой силе, выше — направляющая проскальзывает.

Проверка. Предельные случаи: $\mu \to 0$ — $\alpha_{max} \to 0$, без трения клин не держит; $\mu \to \infty$ — $\alpha_{max} \to 180°$, держит при любом угле. Например, при $\mu = 0{,}2$ угол должен быть меньше $2\,\mathrm{arctg}\,0{,}2 \approx 23°$. Ответ безразмерный, как и положено углу.

Ответ. Механизм не даёт двигать направляющую вправо (в сторону сужения зазора): трение тянет шарик в клин, и силы давления растут вместе с внешней силой. Работу обеспечивают трение шарика о направляющую и шарика о корпус; трение направляющей о корпус не нужно. Механизм держит при любой силе, если $\alpha \leq 2\,\mathrm{arctg}\,\mu$.