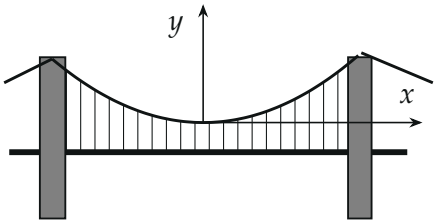
Форма цепи висячего моста

Задача 6. [ИОШ 2014/15, 11 класс, задача 6] В настоящее время в мире широко используются висячие мосты («Акаси-Кайкё», Япония, длина основного пролёта 1991 м; «Золотые ворота», США, 1280 м; «Босфорский мост», Турция, 1074 м и др.). Несущая конструкция висячего моста представляет собой гибкий элемент — «кабель» или «цепь», закреплённый на прочных опорах — пилонах, а проезжая часть подвешена к цепи на вертикальных тросах. Считая, что масса проезжей части моста много больше массы цепи, вертикальные тросы расположены близко друг к другу (так, что цепь можно считать плавной кривой), а их длины подобраны так, что силы натяжения всех тросов одинаковы, найти форму цепи (уравнение цепи в системе координат, показанной на рисунке).





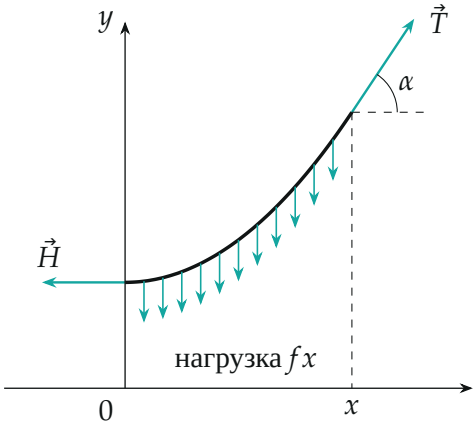


▲ **Решение. Что происходит.** Задача на равновесие гибкой нити под распределённой нагрузкой. Цепь гибкая: сила натяжения в каждой точке направлена по касательной. Тросы одинаковы и стоят с равным шагом по горизонтали, поэтому нагрузка на цепь распределена равномерно *по*

горизонтали: на каждый метр по x приходится одна и та же сила. Отрежем мысленно кусок цепи от нижней точки до точки с абсциссой x и запишем для него условия равновесия — получим наклон цепи в каждой точке, а по наклону и саму кривую.

Обозначения. F — сила натяжения одного вертикального троса; Δx — расстояние между соседними тросами; $f = F/\Delta x$ — нагрузка на единицу длины моста по горизонтали; $\vec{H}$ — сила натяжения цепи в нижней точке $x = 0$ (там цепь горизонтальна); $\vec{T}$ — сила натяжения цепи в точке с абсциссой x; α — угол наклона цепи к горизонтали в этой точке; $y(x)$ — уравнение цепи. Цепь симметрична, начало координат — в её нижней точке, решаем для $x > 0$.

1. Силы на кусок цепи от 0 до x. На кусок действуют: слева — натяжение $\vec{H}$ со стороны левой части цепи (горизонтально, влево); справа — натяжение $\vec{T}$ со стороны правой части (по касательной, вверх-вправо под углом α); тросы на отрезке длиной x — их там $x/\Delta x$, общая сила $F\,x/\Delta x = fx$ вниз. Массой цепи пренебрегаем.



Кусок цепи от нижней точки до точки x (чёрный). Тросы тянут его вниз (бирюзовые стрелки), по краям — натяжения цепи $\vec{H}$ и $\vec{T}$.

2. Условия равновесия куска. Второй закон Ньютона для покоящегося куска в проекциях на оси:

$$x:\ T\cos\alpha - H = 0, \qquad y:\ T\sin\alpha - fx = 0.$$

Из первого: горизонтальная составляющая натяжения цепи одна и та же во всех точках, $T\cos\alpha = H$ (тросы вертикальны и её не меняют). Делим второе на первое:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{fx}{H}.$$

3. От наклона к форме. Тангенс угла наклона касательной к графику — производная: $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$. Значит,

$$y'(x) = \frac{f}{H}\,x.$$

Функция, производная которой пропорциональна x, — это $\dfrac{f}{2H}x^2 + C$. В выбранной системе координат $y(0) = 0$, поэтому $C = 0$:

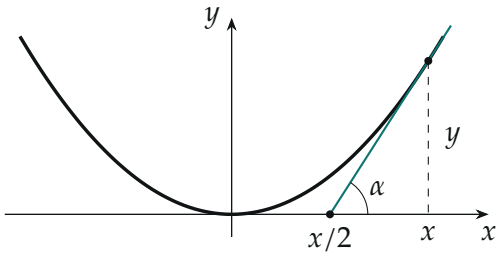
$$y(x) = \frac{f}{2H}\,x^2.$$

Цепь висячего моста — парабола. Для $x < 0$ всё то же самое, кусок лежит слева, и формула та же.

Второй способ: правило моментов. Возьмём моменты сил, действующих на тот же кусок, относительно его правого конца (точки x): момент $\vec{T}$ равен нулю. Нагрузка fx распределена равномерно, её равнодействующая приложена в середине отрезка, на расстоянии $x/2$ от правого конца; плечо силы H — высота y:

$$H\,y = fx\cdot\frac{x}{2} \quad\Rightarrow\quad y = \frac{f}{2H}x^2.$$

Отсюда же видно свойство параболы: три силы $\vec{H}$, $\vec{T}$ и равнодействующая нагрузки пересекаются в одной точке, поэтому касательная к цепи в точке x пересекает ось x в точке $x/2$.

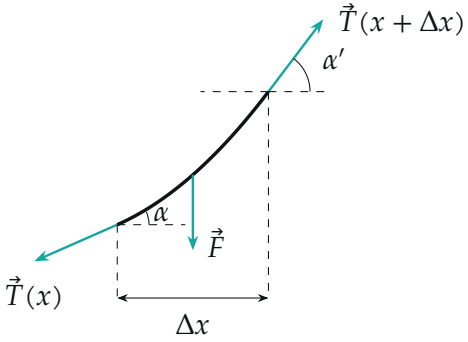


Касательная к параболе $y = \frac{f}{2H}x^2$ в точке x проходит через точку $x/2$ оси: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x/2} = \dfrac{f}{H}x$.

Третий способ: элемент цепи (как у организаторов). Возьмём малый участок цепи между серединами двух соседних промежутков между тросами: длина по горизонтали Δx, посередине — один трос с силой F. Условия равновесия:

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha' = T(x)\cos\alpha, \qquad T(x+\Delta x)\sin\alpha' = T(x)\sin\alpha + F.$$

Первое снова говорит, что $T\cos\alpha = H$ не меняется вдоль цепи. Второе: величина $T\sin\alpha = H\operatorname{tg}\alpha = Hy'$ растёт на F на длине Δx, то есть $(Hy')' = F/\Delta x = f$ — то же уравнение, что в пункте 3.



Малый участок цепи с одним тросом посередине.

4. Связь с размерами моста. Пусть длина пролёта между пилонами L, а провис цепи (высота точек крепления над нижней точкой) h. Под-

ставляя $x = L/2$, $y = h$, найдём $f/(2H) = 4h/L^2$:

$$y(x) = \frac{4h}{L^2}\,x^2, \qquad H = \frac{fL^2}{8h}.$$

Чем меньше провис, тем больше натяжение цепи — поэтому цепь не делают натянутой горизонтально.

Обратите внимание. Свободно висящая цепь (без моста) провисает по другой кривой — цепной линии: её вес распределён равномерно *вдоль цепи*, а не по горизонтали. Здесь масса цепи мала, нагрузка — от тросов, равномерная по x, и получается парабола.

Проверка. Размерность: $[f/H] = \dfrac{\text{Н/м}}{\text{Н}} = \text{м}^{-1}$, $[fx^2/H] = \text{м}$ — верно. Чем тяжелее мост (f больше) при том же натяжении H, тем круче парабола; при $f \to 0$ цепь становится горизонтальной прямой. Кривая симметрична, минимум — в начале координат, как на рисунке.

Ответ. $y(x) = \dfrac{f}{2H}\,x^2$ — парабола; $f = F/\Delta x$ — нагрузка на единицу длины моста по горизонтали (F — натяжение троса, Δx — шаг тросов), H — натяжение цепи в нижней точке (горизонтальная составляющая натяжения, одинаковая по всей цепи). Через пролёт L и провис h: $y = 4hx^2/L^2$.