Колонны Исаакиевского собора

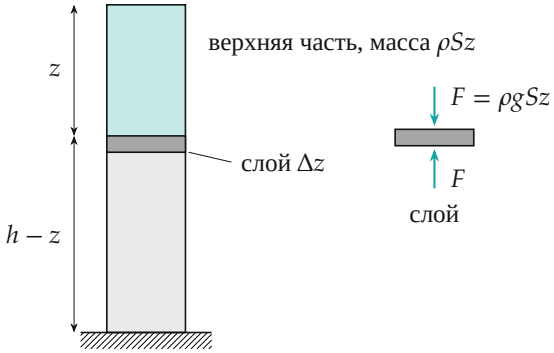
Задача 3. [ИОШ 2014/15, 9 класс, задача 3] Колонны Исаакиевского собора в Санкт-Петербурге изготовлены из гранита и имеют высоту $h = 30$ м. Оцените, на сколько сжаты колонны под действием собственной тяжести. Плотность гранита $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, модуль Юнга $E = 5 \cdot 10^{10}$ Па.

Указание. Модуль Юнга E определяется как коэффициент пропорциональности между напряжением (F/S) и относительным удлинением образца ($\Delta l/l$): $F/S = E\,\Delta l/l$, где F — сила, растягивающая или сжимающая образец, S — площадь поперечного сечения образца, Δl — его удлинение или укорочение, l — первоначальная длина.



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на закон Гука для тела с *неравномерной* нагрузкой. Каждый горизонтальный слой колонны держит на себе вес всей части колонны, которая выше него. Верхний слой не сжат совсем, нижний сжат весом всей колонны. Значит, сжатие разных слоёв разное, и формулу $F/S = E\,\Delta l/l$ сразу ко всей колонне применить нельзя: в ней F одинакова по всей длине. Применим её к тонкому слою, где сила почти постоянна, и сложим укорочения слоёв.

Обозначения. S — площадь сечения колонны (она одинакова по высоте и в ответ не войдёт); z — расстояние от верха колонны до слоя; Δz — толщина слоя; $F(z)$ — сила, сжимающая слой; $\sigma(z) = F/S$ — напряжение; $\varepsilon(z)$ — относительное сжатие слоя; Δh — укорочение всей колонны; $g = 9{,}8$ м/с^2.



Слой на глубине z под верхом колонны. Сверху на него давит часть колонны над ним (бирюзовая), снизу — такая же по модулю сила со стороны нижней части.

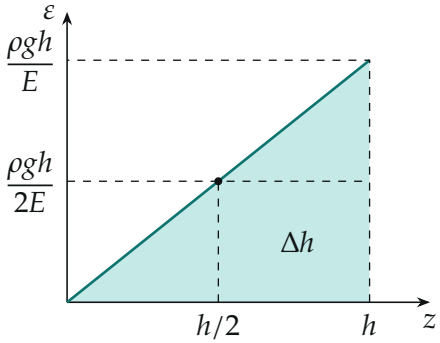
1. Сила, сжимающая слой. Часть колонны над слоем покоится. По второму закону Ньютона для этой части в проекции на вертикаль её вес $\rho S z\, g$ уравновешен силой со стороны слоя. По третьему закону Ньютона с такой же силой верхняя часть давит на слой:

$$F(z) = \rho g S z, \qquad \sigma(z) = \frac{F}{S} = \rho g z.$$

Напряжение растёт линейно: 0 наверху, $\rho g h$ внизу. Вес самого тонкого слоя мал по сравнению с F, поэтому сжимающая сила по его толщине одна и та же.

2. Сжатие слоя. Для тонкого слоя сила постоянна, и закон Гука из указания применим:

$$\frac{\sigma(z)}{E} = \varepsilon(z) = \frac{\Delta(\Delta z)}{\Delta z} \quad \Rightarrow \quad \Delta(\Delta z) = \frac{\rho g z}{E}\,\Delta z.$$



Относительное сжатие слоя растёт линейно с глубиной. Укорочение колонны — площадь под графиком; она равна площади прямоугольника высотой $\varepsilon(h/2)$.

3. Сжатие всей колонны. Колонна укорачивается на сумму укорочений слоёв:

$$\Delta h = \sum \varepsilon(z)\,\Delta z.$$

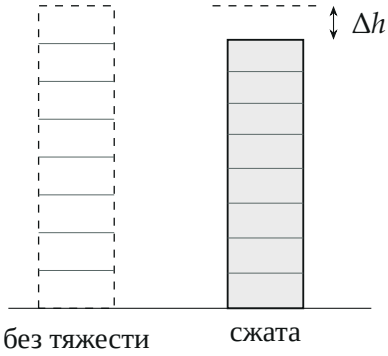
На графике $\varepsilon(z)$ это площадь под прямой от 0 до h — площадь прямоугольного треугольника с катетами h и $\rho gh/E$:

$$\Delta h = \frac{1}{2}\cdot h \cdot \frac{\rho gh}{E} = \frac{\rho gh^2}{2E}.$$

Тот же результат даёт оценка «по середине»: раз ε линейна по z, её среднее значение равно значению в середине колонны $\varepsilon(h/2) = \rho gh/(2E)$, и $\Delta h = \varepsilon(h/2)\,h$.

4. Число.

$$\Delta h = \frac{2{,}7\cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 30^2}{2\cdot 5\cdot 10^{10}}\ \text{м} \approx 2{,}4\cdot 10^{-4}\ \text{м} = 0{,}24\ \text{мм}.$$



Сжатие сильно преувеличено: нижние слои укорочены больше верхних, верхний не сжат совсем.

Обратите внимание. Брать в закон Гука вес всей колонны $\rho g S h$ нельзя: им сжат только нижний слой. Такой счёт даёт ответ вдвое больше, $\rho g h^2/E$.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг/м}^3 \cdot \text{м/с}^2 \cdot \text{м}^2}{\text{Па}} = \dfrac{\text{Н/м}^2 \cdot \text{м}}{\text{Н/м}^2} = \text{м}$. Предельные случаи: чем жёстче материал ($E \to \infty$), тем меньше сжатие; $\Delta h \propto h^2$ — в два раза более высокая колонна сжимается в четыре раза сильнее, потому что вдвое больше и длина, и среднее напряжение. Относительное сжатие $\Delta h/h = \rho g h/(2E) \approx 8 \cdot 10^{-6}$ — ничтожно, закон Гука заведомо применим.

Колонна высотой с десятиэтажный дом проседает под своим весом меньше чем на треть миллиметра.

Ответ. $\Delta h = \dfrac{\rho g h^2}{2E} \approx 2{,}4 \cdot 10^{-4}$ м $\approx 0{,}24$ мм.