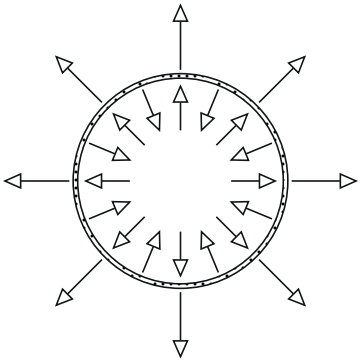
Станция в тонкой сферической оболочке

Задача 5. [ИОШ 2014/15, 9 класс, задача 5] Космическая станция представляет собой шар радиуса R, температура поверхности которого в результате работы аппаратуры внутри станции и излучения тепла в пространство поддерживается равной T. Станцию окружают тонкой сферической оболочкой радиуса $2R$. Найти новую температуру поверхности станции и температуру оболочки.

Указание. Единица поверхности станции и оболочки излучают по всем направлениям энергию, пропорциональную четвёртой степени их температуры (закон Стефана–Больцмана).



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на тепловой баланс при излучении. Аппаратура выделяет постоянную мощность. В установившемся режиме каждое тело (станция, оболочка) получает в секунду столько энергии, сколько отдаёт. Оболочка задерживает часть излучения: то, что она излучает внутрь, частично возвращается на станцию, и станция нагревается. Тонкое место — какая доля излучения оболочки, направленного внутрь, попадает на станцию: не вся, часть лучей проходит мимо станции и снова падает на оболочку.

Обозначения. W — мощность аппаратуры; σ — коэффициент в законе Стефана–Больцмана: единица поверхности при температуре T излучает в секунду σT^4; $T_\text{о}$ — температура оболочки; T' — новая температура станции. Станцию и оболочку считаем абсолютно чёрными: всё

падающее излучение они поглощают (иначе в указании была бы дана отражательная способность). Оболочка тонкая — температура обеих её сторон одна, $T_о$, и площадь обеих сторон $4\pi(2R)^2$.

1. Без оболочки. Вся мощность аппаратуры уходит излучением с поверхности станции площадью $4\pi R^2$:

$$W = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

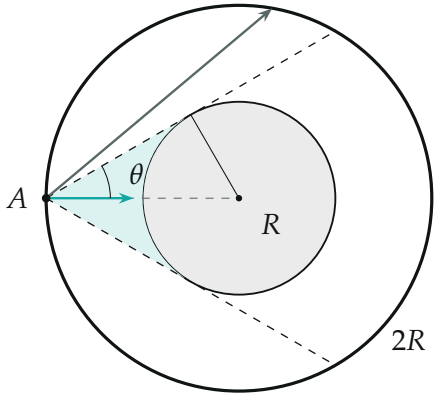
2. Температура оболочки. Возьмём систему «станция + оболочка». Наружу энергия уходит только излучением внешней стороны оболочки, а внутри выделяется мощность W. Баланс энергии системы в установившемся режиме:

$$W = 4\pi(2R)^2 \sigma T_о^4 = 16\pi R^2 \sigma T_о^4.$$

Сравнивая с пунктом 1, $16T_о^4 = 4T^4$:

$$T_о = \frac{T}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71\,T.$$

3. Какая часть внутреннего излучения оболочки падает на станцию. Внутрь оболочка излучает столько же, сколько наружу: $\Phi_{вн} = 16\pi R^2 \sigma T_о^4 = W$. Луч, вышедший из точки оболочки внутрь, попадает на станцию, только если идёт внутри конуса, касающегося станции. Остальные лучи пролетают мимо и снова падают на оболочку.



Из точки A оболочки станция видна под углом 2θ, $\sin\theta = R/(2R) = 1/2$. Луч вне этого конуса (серый) возвращается на оболочку.

Долю найдём без геометрии, из теплового равновесия. Пусть аппаратура выключена, и станция с оболочкой давно пришли к одной температуре T_0. Тогда суммарного переноса энергии между ними нет. Станция излучает $4\pi R^2\sigma T_0^4$, и всё это падает на оболочку (оболочка окружает её со всех сторон). Значит, оболочка при той же температуре посылает на станцию тоже $4\pi R^2\sigma T_0^4$. Эта величина зависит только от температуры оболочки, поэтому при температуре $T_\text{о}$ на станцию падает

$$\Phi_2 = 4\pi R^2\sigma T_\text{о}^4 = \frac{R^2}{(2R)^2}\,\Phi_\text{вн} = \frac{1}{4}\,\Phi_\text{вн}.$$

На станцию попадает только четверть, три четверти возвращаются на оболочку. Та же доля $\sin^2\theta = 1/4$ получается из геометрии рисунка.

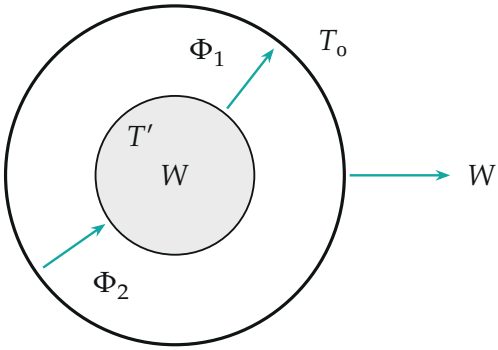
4. Температура станции. Баланс энергии станции: получает от аппаратуры W и от оболочки Φ_2, излучает $\Phi_1 = 4\pi R^2\sigma T'^4$:

$$W + 4\pi R^2\sigma T_\text{о}^4 = 4\pi R^2\sigma T'^4.$$

Делим на $4\pi R^2\sigma$ и подставляем $W/(4\pi R^2\sigma) = T^4$, $T_\text{о}^4 = T^4/4$:

$$T'^4 = T^4 + \frac{T^4}{4} = \frac{5}{4}\,T^4 \quad\Rightarrow\quad T' = \sqrt[4]{\frac{5}{4}}\,T \approx 1{,}057\,T.$$

Станция нагрелась примерно на 6% (при $T = 300$ K — на 17 K).

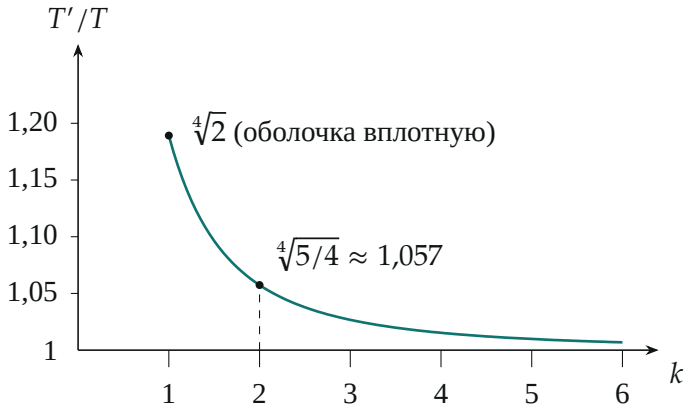


Потоки энергии в установившемся режиме. Φ_1 — излучение станции, Φ_2 — часть внутреннего излучения оболочки, попавшая на станцию, W — излучение оболочки наружу.

5. Проверка балансом оболочки. Оболочка поглощает всё излучение станции $\Phi_1 = \frac{5}{4}W$ и три четверти своего внутреннего излучения $\frac{3}{4}\Phi_{\text{вн}} = \frac{3}{4}W$ — всего $2W$. Излучает внутрь $\Phi_{\text{вн}} = W$ и наружу W — тоже $2W$. Баланс сходится.

Обратите внимание. Если считать, что *всё* излучение оболочки внутрь попадает на станцию, получится $T'^4 = 2T^4$, $T' = \sqrt[4]{2}\,T \approx 1{,}19\,T$ — так в ответе у организаторов. Это верно лишь для оболочки вплотную к станции; при радиусе $2R$ три четверти этого излучения пролетают мимо станции. Для оболочки радиуса kR тот же счёт даёт $T_{\text{о}}^4 = T^4/k^2$ и

$$T'^4 = T^4\left(1 + \frac{1}{k^2}\right).$$



Новая температура станции при оболочке радиуса kR. При $k \to 1$ — $\sqrt[4]{2}\,T$, при $k \to \infty$ оболочка ничего не возвращает, $T' \to T$.

Проверка. Размерности одинаковы: везде мощность σT^4·площадь. Пределы верные (рисунок выше). Оболочка холоднее станции ($0{,}71\,T < 1{,}06\,T$) — тепло идёт от горячего к холодному, как и должно.

Оболочка работает как одеяло: наружу уходит та же мощность, но с большей и более холодной поверхности, а станция под ней немного нагревается.

Ответ. Температура оболочки $T_{\text{о}} = T/\sqrt{2} \approx 0{,}71\,T$; новая температура станции $T' = \sqrt[4]{5/4}\;T \approx 1{,}06\,T$ (станция и оболочка считаются абсолютно чёрными).