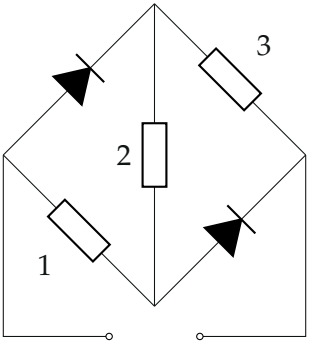
Три резистора и два диода на переменном токе

Задача 2. [ИОШ 2015/16, 11 класс, задача 2] Цепочку из трёх резисторов $r_1 = R$, $r_2 = R$, $r_3 = 2R$ и двух идеальных диодов подключили к источнику переменного напряжения с амплитудой U_0 (см. рисунок). Найти среднюю тепловую мощность, которая будет выделяться на каждом резисторе за большое время. Идеальный диод проводит электрический ток в одном направлении — в направлении стрелочки в обозначении диода. Провода сопротивления не имеют.



▲ **Решение. Что происходит.** Идеальный диод — ключ: в прямом направлении это провод, в обратном — разрыв. Знак напряжения источника меняется каждые полпериода, поэтому цепь попеременно становится одной из двух разных схем. В каждой половине периода считаем мгновенные мощности как в цепи постоянного тока, потом усредняем по времени. Задача на нелинейную цепь с диодами и среднюю мощность переменного тока.

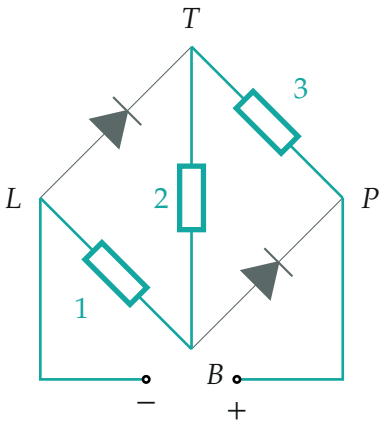
Обозначения. Узлы: L — левый (у левой клеммы), T — верхний, B — нижний, P — правый (у правой клеммы); $u(t) = U_0 \sin \omega t$ — напряжение между левой и правой клеммами ($\varphi_L - \varphi_P$); P_i — мгновенная, $\bar{P}_i$ — средняя мощность на резисторе i. Диод LT пропускает ток от L к T, диод BP — от B к P.

1. Половина периода, когда $u < 0$ (правая клемма «плюс»). Ток выходит из P. Диод BP включён в обратном направлении ($\varphi_P > \varphi_B$) — закрыт. Из P ток может идти только через резистор 3 в узел T. Из T диод

LT ток к L не пропускает (это обратное направление), значит, ток идёт через резистор 2 в B, а из B — через резистор 1 в L. Все три резистора включены последовательно, общее сопротивление

$$r_1 + r_2 + r_3 = 4R.$$

Проверим согласованность: ток течёт $P \to T \to B \to L$, потенциалы убывают в этом порядке, поэтому $\varphi_T > \varphi_L$ и $\varphi_P > \varphi_B$ — оба диода действительно под обратным напряжением.



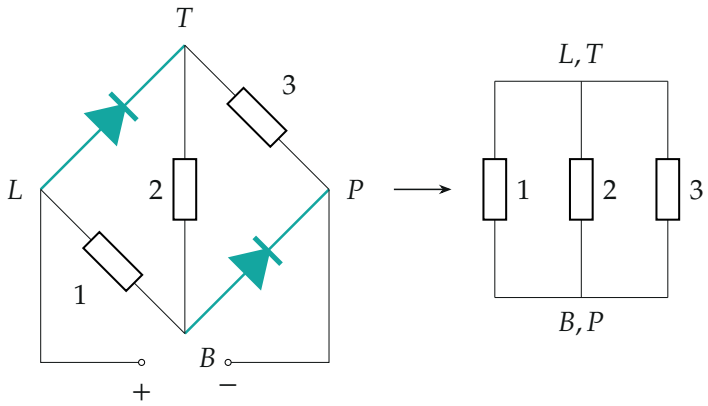
Правая клемма «плюс»: оба диода закрыты (серые), ток идёт $P \to 3 \to T \to 2 \to B \to 1 \to L$ — резисторы последовательно.

Ток $i = |u|/(4R)$, мгновенная мощность на резисторе r_k: $P_k = i^2 r_k = \dfrac{u^2 r_k}{16R^2}$:

$$P_1 = \frac{u^2}{16R}, \qquad P_2 = \frac{u^2}{16R}, \qquad P_3 = \frac{u^2}{8R}.$$

2. Половина периода, когда $u > 0$ (левая клемма «плюс»). Ток входит в L. Диод LT открыт и замыкает L с T: $\varphi_T = \varphi_L$. Ток, пришедший в B по резисторам 1 и 2, уходит через открытый диод BP в P: $\varphi_B = \varphi_P$. Теперь каждый резистор соединяет узел с потенциалом φ_L (это L или T) с узлом с потенциалом φ_P (это B или P): резистор 1 — L и B, резистор 2 — T и B, резистор 3 — T и P. Все три включены параллельно, на каждом

напряжение u. Диод BP открыт правильно: в B втекают токи резисторов 1 и 2, вытекают они только через диод, в его прямом направлении.



Левая клемма «плюс»: открытые диоды (бирюзовые) — провода, T слился с L, B — с P; справа — та же цепь: три резистора параллельно.

Мгновенные мощности:

$$P_1 = \frac{u^2}{R}, \qquad P_2 = \frac{u^2}{R}, \qquad P_3 = \frac{u^2}{2R}.$$

3. Среднее за полпериода. В обоих случаях мощность пропорциональна $u^2 = U_0^2 \sin^2 \omega t$. Среднее значение $\sin^2$ за полпериода равно $1/2$ (так как $\sin^2 + \cos^2 = 1$, а средние $\sin^2$ и $\cos^2$ за полпериода одинаковы). Поэтому за «свою» половину периода средняя мощность равна мгновенной с заменой $u^2 \to U_0^2/2$:

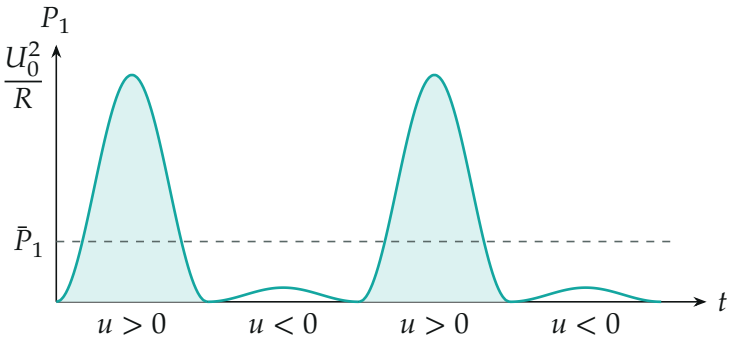
$$u < 0: \quad \bar{P}_1 = \frac{U_0^2}{32R}, \quad \bar{P}_2 = \frac{U_0^2}{32R}, \quad \bar{P}_3 = \frac{U_0^2}{16R};$$
$$u > 0: \quad \bar{P}_1 = \frac{U_0^2}{2R}, \quad \bar{P}_2 = \frac{U_0^2}{2R}, \quad \bar{P}_3 = \frac{U_0^2}{4R}.$$

4. Среднее за большое время. За большое время каждая схема работает ровно половину времени, поэтому средняя мощность — полусум-

ма:

$$\bar{P}_1 = \bar{P}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{U_0^2}{32R} + \frac{U_0^2}{2R}\right) = \frac{17\,U_0^2}{64R},$$

$$\bar{P}_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{U_0^2}{16R} + \frac{U_0^2}{4R}\right) = \frac{5\,U_0^2}{32R}.$$



Мгновенная мощность на резисторе 1 *(построена по формулам п. 1 и 2): горбы высотой* U_0^2/R *при* $u > 0$ *и в 16 раз ниже при* $u < 0$*; пунктир — среднее* $\frac{17}{64}U_0^2/R$.

Обратите внимание. В схеме «параллельно» сопротивление r_3 вдвое больше, но мощность на нём вдвое *меньше* (u^2/r), а в схеме «последовательно» — вдвое *больше* (i^2r). Множитель $1/2$ появляется дважды: от среднего $\sin^2$ и от того, что каждая схема работает лишь половину времени.

Проверка. Размерность U^2/R — ватт. Средняя мощность источника: при $u > 0$ сопротивление цепи $R/(1 + 1 + 1/2) = 2R/5$, средняя мощность $\frac{U_0^2}{2} \cdot \frac{5}{2R} = \frac{5U_0^2}{4R}$; при $u < 0$ — $\frac{U_0^2}{2\cdot 4R} = \frac{U_0^2}{8R}$; полусумма $\frac{11U_0^2}{16R}$. Сумма ответов $\frac{17+17+10}{64} \cdot \frac{U_0^2}{R} = \frac{44}{64}\frac{U_0^2}{R} = \frac{11U_0^2}{16R}$ — совпало: вся энергия источника выделилась в резисторах (на идеальных диодах тепла нет).

Ответ. $\bar{P}_1 = \bar{P}_2 = \frac{17\,U_0^2}{64R}$; $\bar{P}_3 = \frac{5\,U_0^2}{32R}$.