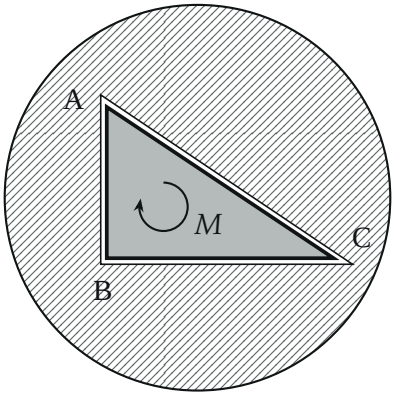
Ключ в треугольном шлице

Задача 3. [ИОШ 2015/16, 11 класс, задача 3] В ряде случаев шлицы (углубления или пазы в головках крепёжных изделий — винтов, болтов и т. д.) должны иметь нестандартную форму. Рассмотрим шлиц в виде прямоугольного треугольника с катетами a (AB) и $3a/2$ (BC). В шлиц вставлен ключ, зазоры между сторонами которого и сторонами шлица малы. К ручке ключа приложены две силы (пара сил), создающие момент M. Определить силы, с которыми ключ действует на грани шлица. Трением пренебречь.

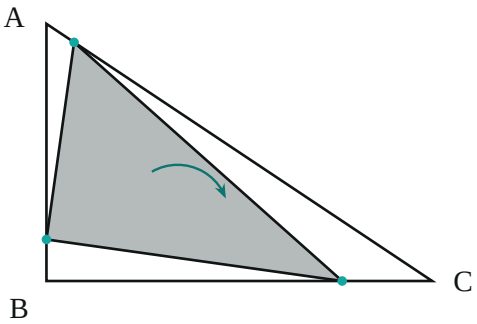


▲ **Решение. Что происходит.** Пара сил поворачивает ключ, и он, выбрав малые зазоры, упирается в шлиц. Без трения стенка может давить на ключ только перпендикулярно своей грани. Ключ в равновесии, поэтому три силы реакции должны (а) давать нулевую сумму — пара сил сама по себе суммы не даёт, и (б) создавать момент, равный M и противоположный ему. Направления сил известны, неизвестны модули и точки приложения; точки найдём из того, как ключ поворачивается. Задача на равновесие твёрдого тела: условие сил и условие моментов.

Обозначения. $b = 3a/2$ — катет BC, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}a$ — гипотенуза AC; F_A, F_B, F_C — силы, с которыми шлиц давит на ключ у вершин A, B, C; ось x — вдоль BC, ось y — вдоль BA, начало в B.

1. Где ключ касается шлица. Момент M на рисунке направлен по часовой стрелке, ключ чуть поворачивается по часовой стрелке вокруг

своей середины. При таком повороте вершина A уходит вправо-вверх — к гипотенузе AC, вершина B — влево-вверх, к грани AB, вершина C — влево-вниз, к грани BC. Так и ложится ключ: каждая вершина упирается в «следующую» по ходу поворота грань. Зазоры малы, поэтому точки касания практически совпадают с вершинами A, B, C.

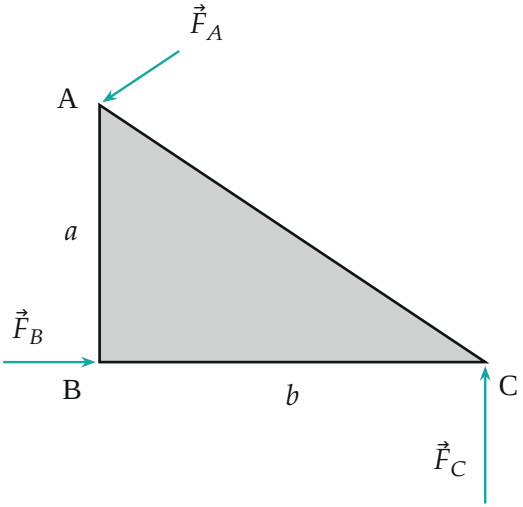


Поворот ключа (зазор сильно преувеличен): ключ касается гипотенузы у вершины A, катета AB — у вершины B, катета BC — у вершины C (точки касания бирюзовые).

2. Силы на ключ. Каждая сила перпендикулярна своей грани и направлена внутрь ключа:

$$\vec{F}_A = -F_A\left(\frac{a}{c};\ \frac{b}{c}\right), \qquad \vec{F}_B = F_B\,(1;\ 0), \qquad \vec{F}_C = F_C\,(0;\ 1),$$

приложены они в точках A, B, C соответственно. Здесь $(a/c;\ b/c)$ — единичный вектор, перпендикулярный гипотенузе AC: она идёт вдоль $(b;\ -a)$, а $(a;\ b)\cdot(b;\ -a) = 0$.



Силы, с которыми шлиц давит на ключ: $\vec{F}_A$ перпендикулярна гипотенузе, $\vec{F}_B$ — катету AB, $\vec{F}_C$ — катету BC.

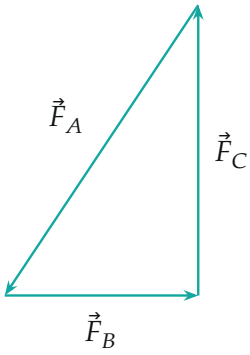
3. Условие равновесия сил. Сумма сил, действующих на ключ, равна нулю; пара сил в эту сумму вклада не даёт. В проекциях на оси x и y:

$$x:\ F_B - F_A\frac{a}{c} = 0, \qquad y:\ F_C - F_A\frac{b}{c} = 0,$$

откуда

$$F_B = \frac{a}{c}F_A, \qquad F_C = \frac{b}{c}F_A.$$

Иначе: три силы, перпендикулярные сторонам треугольника, складываются в замкнутый треугольник, подобный ABC (повёрнутый на 90°), поэтому $F_B : F_C : F_A = a : b : c$.



Треугольник сил замкнут: катеты F_B и F_C относятся как $a : b = 2 : 3$, гипотенуза — F_A.

4. Условие моментов. Сумма моментов всех сил относительно любой точки равна нулю; возьмём точку B — через неё проходит линия действия $\vec{F}_B$, и её момент нулевой. Момент пары не зависит от точки и равен M по часовой стрелке. Сила $\vec{F}_C$ вертикальна, приложена на расстоянии b от B — её момент $F_C b$ против часовой стрелки. Сила $\vec{F}_A$ приложена в A; её составляющая $F_A a/c$ вдоль x (влево) имеет плечо a и тоже вращает против часовой стрелки, вертикальная составляющая проходит через B. Против часовой — положительно:

$$F_C\, b + F_A \frac{a}{c}\, a - M = 0.$$

Подставим $F_C = F_A b/c$:

$$F_A\, \frac{a^2 + b^2}{c} = M \quad \Rightarrow \quad F_A = \frac{M}{c}.$$

5. Ответ через a. $c = \dfrac{\sqrt{13}}{2}a$, $c^2 = \dfrac{13}{4}a^2$:

$$F_A = \frac{M}{c} = \frac{2M}{\sqrt{13}\,a},$$

$$F_B = \frac{Ma}{c^2} = \frac{4M}{13a}, \qquad F_C = \frac{Mb}{c^2} = \frac{6M}{13a}.$$

По третьему закону Ньютона ключ давит на грани шлица с такими же по модулю силами, направленными наружу: на гипотенузу AC (у вершины A) — $\dfrac{2M}{\sqrt{13}\,a}$, на катет AB (у вершины B) — $\dfrac{4M}{13a}$, на катет BC (у вершины C) — $\dfrac{6M}{13a}$.

Обратите внимание. Точки приложения сил — не середины граней, а вершины ключа: только они касаются шлица после поворота. Если бы момент был направлен против часовой стрелки, вершины упёрлись бы в другие грани (A — в AB, B — в BC, C — в AC), но сила на каждую грань по модулю осталась бы той же. У организаторов значения F_B и F_C переставлены: на катет AB (длина a) приходится меньшая сила $4M/(13a)$, на BC — большая $6M/(13a)$; это видно и из их же соотношения $F_B/F_C = a/b$.

Проверка. Размерность: момент, делённый на длину, — сила. Второй способ — моменты относительно точки A: $\vec{F}_A$ проходит через A и момента не даёт; $\vec{F}_B$ (вправо, приложена в B на a ниже A) вращает вокруг A против часовой стрелки с плечом a; $\vec{F}_C$ (вверх, приложена в C на b правее A) — тоже против часовой, с плечом b. Пара — M по часовой. Тогда $F_B a + F_C b = M$; подставляем: $\frac{4}{13}M + \frac{6}{13}\cdot\frac{3}{2}M = \frac{4+9}{13}M = M$ — верно. Смысл: силы пропорциональны сторонам, поэтому на длинную грань давят сильнее.

Ответ. На гипотенузу AC: $F_A = \dfrac{2M}{\sqrt{13}\,a}$; на катет AB: $F_B = \dfrac{4M}{13a}$; на катет BC: $F_C = \dfrac{6M}{13a}$ (силы приложены у вершин A, B, C соответственно и перпендикулярны граням).