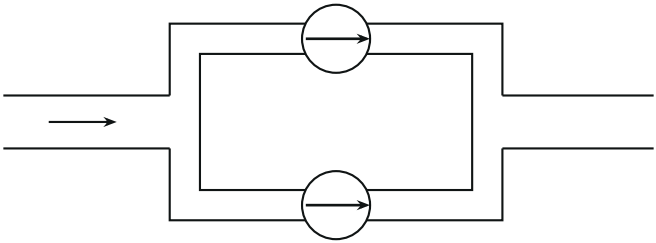
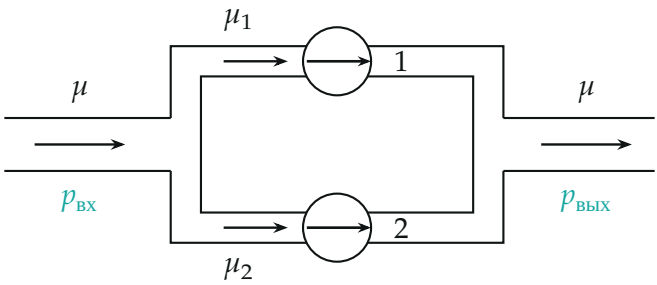
Параллельные насосы

Задача 4. [ИОШ 2015/16, 11 класс, задача 4] Важным параметром жидкостного насоса является его напорно-расходная характеристика, которая показывает, какой перепад давлений Δp (напор) может обеспечить насос в зависимости от количества жидкости μ, которое он может прокачать в единицу времени (расход). Эта зависимость, как правило, является убывающей функцией: при большом расходе насос может обеспечить только маленький напор и наоборот. Два насоса с напорно-расходными характеристиками $\Delta p_1 = p_0 - \alpha\mu^2$ и $\Delta p_2 = p_0 - \beta\mu$, где p_0, α и β — известные числа с соответствующими размерностями, включили в трубопровод так, как показано на рисунке (параллельно). Каким будет расход в системе насосов при напоре $\Delta p = p_0/2$? Какой напор обеспечит система насосов при расходе μ_0? (⊖ — схематическое обозначение насоса.)



▲ **Решение. Что происходит.** Насосы стоят в двух параллельных ветвях между одними и теми же сечениями трубы: слева от разветвления давление одно, справа — другое. Значит, оба насоса создают *один и тот же* напор Δp, а жидкость, прошедшая систему, делится между ветвями — расходы складываются. Это то же правило, что для параллельно соединённых элементов цепи (одно напряжение, токи складываются). Задача на сложение характеристик; удобно смотреть на графики.

Обозначения. Δp — общий напор системы; μ_1, μ_2 — расходы через первый и второй насос; $\mu = \mu_1 + \mu_2$ — расход системы.



Обе ветви начинаются в сечении с давлением $p_{вх}$ и кончаются в сечении с давлением $p_{вых}$: напор у насосов общий, $\Delta p = p_{вых} - p_{вх}$, расходы складываются.

1. Правила параллельного соединения. Вход обоих насосов — одно сечение подводящей трубы, выход — одно сечение отводящей. Перепад давлений на каждом насосе равен разности давлений в этих сечениях:

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p.$$

Жидкость несжимаема и нигде не накапливается, поэтому за единицу времени в систему входит столько, сколько проходит через обе ветви (закон сохранения массы):

$$\mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Пункт 1. Расход при напоре $\Delta p = p_0/2$.

2. Расход каждого насоса. Подставим напор в характеристику каждого и выразим расход:

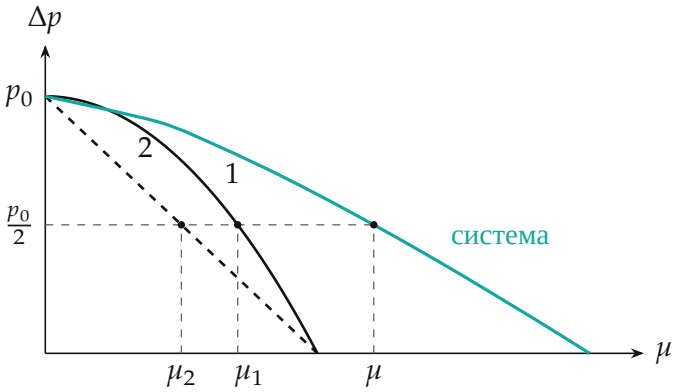
$$p_0 - \alpha\mu_1^2 = \frac{p_0}{2} \;\Rightarrow\; \mu_1 = \sqrt{\frac{p_0}{2\alpha}}, \qquad p_0 - \beta\mu_2 = \frac{p_0}{2} \;\Rightarrow\; \mu_2 = \frac{p_0}{2\beta}.$$

Корень берём положительный: расход через насос идёт в сторону его стрелки.

3. Расход системы.

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = \sqrt{\frac{p_0}{2\alpha}} + \frac{p_0}{2\beta}.$$

На графике это горизонтальная прямая $\Delta p = p_0/2$: точки её пересечения с характеристиками дают μ_1 и μ_2, а их сумма — точку на характеристике системы.



Характеристики насосов 1 *(сплошная) и* 2 *(штриховая) и системы (бирюзовая): при одном напоре расходы складываются — характеристики складываются по горизонтали. Построено при* $\alpha = \beta = p_0 = 1$.

Пункт 2. Напор при расходе системы μ_0**.**

4. Как делится расход. Теперь известна сумма расходов, а напор неизвестен. Жидкость распределится между ветвями так, чтобы напоры насосов были одинаковы (п. 1):

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu_0, \qquad p_0 - \alpha\mu_1^2 = p_0 - \beta\mu_2.$$

Из второго равенства $\mu_2 = \dfrac{\alpha}{\beta}\mu_1^2$; подставим в первое:

$$\alpha\mu_1^2 + \beta\mu_1 - \beta\mu_0 = 0.$$

5. Решаем квадратное уравнение.

$$\mu_1 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_0}}{2\alpha}.$$

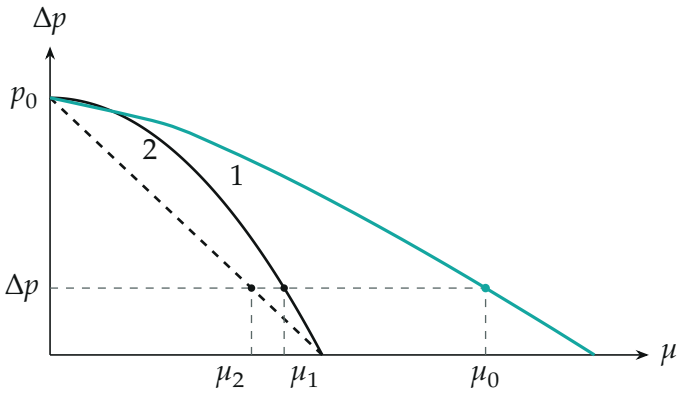
Расход μ_1 положителен, поэтому берём знак «+» (второй корень отрицательный):

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_0} - \beta}{2\alpha}.$$

6. Напор. Подставим μ_1 в характеристику первого насоса:

$$\Delta p = p_0 - \alpha\mu_1^2 = p_0 - \frac{(\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_0} - \beta)^2}{4\alpha}.$$

На графике: вертикаль $\mu = \mu_0$ пересекает характеристику системы на высоте Δp; горизонталь на этой высоте делит μ_0 на μ_1 и μ_2.



Пункт 2: по заданному расходу μ_0 находим на характеристике системы напор Δp и разбиение $\mu_0 = \mu_1 + \mu_2$ (построено при $\alpha = \beta = p_0 = 1$, $\mu_0 = 1{,}6$).

Обратите внимание. Складываются расходы, а не напоры: параллельные насосы не «поднимают» давление выше p_0, они позволяют при том же напоре прокачать больше. Напоры складывались бы при последовательном соединении. Формулы верны, пока $\Delta p \geq 0$, то есть μ_0 не больше суммы наибольших расходов $\sqrt{p_0/\alpha} + p_0/\beta$.

Проверка. Размерности: $\alpha\mu^2$ и $\beta\mu$ — давления, значит β^2 и $\alpha\beta\mu_0$ одной размерности, а β^2/α — давление. Численно при $\alpha = \beta = p_0 = 1$, $\mu_0 = 1{,}6$: $\mu_1 = 0{,}860$, $\mu_2 = 0{,}740$; напоры $1 - 0{,}860^2 = 0{,}260$ и $1 - 0{,}740 = 0{,}260$ совпали. Предел $\beta \to \infty$ (второй насос почти не

качает): $\mu_1 \to \mu_0$ и $\Delta p \to p_0 - \alpha\mu_0^2$ — работает один первый насос, как и должно быть. Ещё одна сверка: при $\mu_0 = \sqrt{p_0/(2\alpha)} + p_0/(2\beta)$ формула пункта 2 даёт $\Delta p = p_0/2$, то есть ответ пункта 1.

Ответ. 1) $\mu = \sqrt{\dfrac{p_0}{2\alpha}} + \dfrac{p_0}{2\beta}$; 2) $\Delta p = p_0 - \dfrac{\left(\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_0} - \beta\right)^2}{4\alpha}$.