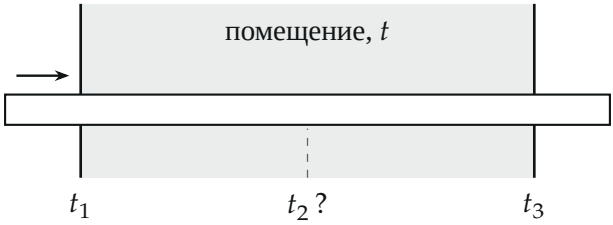
Горячая труба в помещении

Задача 6. [ИОШ 2015/16, 11 класс, задача 6] Через помещение, в котором поддерживается постоянная температура $t = 15\,^\circ\mathrm{C}$, проходит труба с горячей водой. Температура трубы в том месте, где она входит в помещение, равна $t_1 = 75\,^\circ\mathrm{C}$, в том месте, где выходит, — $t_3 = 30\,^\circ\mathrm{C}$. Чему равна температура посередине трубы? Считать, что теплообмен между тем или иным участком трубы и помещением пропорционален разности температур этого участка трубы и помещения.



Поясняющий рисунок: труба с водой входит в помещение при температуре t_1, выходит при t_3; ищем t_2 посередине.

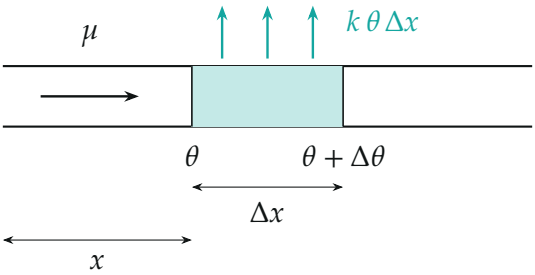
▲ **Решение. Что происходит.** Вода течёт по трубе с постоянным расходом и по дороге отдаёт тепло в помещение. Чем горячее участок, тем быстрее он остывает: поток тепла пропорционален превышению температуры над комнатной. Поэтому вода остывает не равномерно по длине, а «в одно и то же число раз» на равных участках: превышение температуры над комнатной убывает по геометрической прогрессии. Задача на тепловой баланс в установившемся режиме.

Обозначения. $\theta = t_{\text{тр}} - t$ — превышение температуры воды над комнатной; $\theta_1 = t_1 - t = 60\,^\circ\mathrm{C}$, $\theta_2 = t_2 - t$, $\theta_3 = t_3 - t = 15\,^\circ\mathrm{C}$; μ — масса воды, протекающей через сечение трубы за единицу времени; c — удельная теплоёмкость воды; k — коэффициент теплообмена единицы длины трубы с помещением; L — длина трубы в помещении, x — расстояние от входа.

1. Тепловой баланс короткого участка. Возьмём участок трубы длиной Δx, на котором температура воды падает от θ до $\theta + \Delta\theta$ ($\Delta\theta < 0$). Режим установившийся: температура в каждой точке трубы со временем

не меняется, поэтому всё тепло, которое вода теряет на участке, уходит через стенки. За единицу времени через участок проходит масса μ и отдаёт тепло $-c\mu\,\Delta\theta$; в помещение уходит $k\,\Delta x\,\theta$ (по условию теплообмен пропорционален разности температур, а у однородной трубы — ещё и длине участка). Уравнение теплового баланса:

$$-c\mu\,\Delta\theta = k\,\theta\,\Delta x \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta\theta}{\theta} = -\frac{k}{c\mu}\,\Delta x.$$

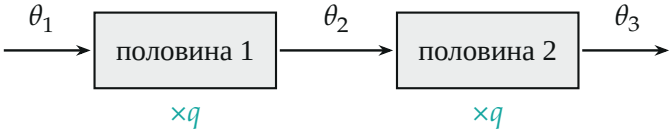


Участок трубы Δx: вода приносит превышение θ, уносит $\theta + \Delta\theta$; разница уходит через стенку в помещение.

2. Равные участки — равное отношение. Отношение $\Delta\theta/\theta$ на каждом коротком участке зависит только от его длины (коэффициент $k/(c\mu)$ один и тот же по всей трубе). Значит, на любом участке длины Δx превышение температуры умножается на одно и то же число. Половина трубы составлена из одинаковых коротких участков, так же как и вторая половина, поэтому обе половины умножают превышение на *одинаковый* множитель q:

$$\theta_2 = q\,\theta_1, \qquad \theta_3 = q\,\theta_2.$$

Это и есть геометрическая прогрессия. Короче: каждая половина трубы — такой же «охладитель», как другая, а охладитель с линейным теплообменом уменьшает превышение в фиксированное число раз.



Две одинаковые половины трубы: каждая умножает превышение температуры над комнатной на одно и то же число $q < 1$.

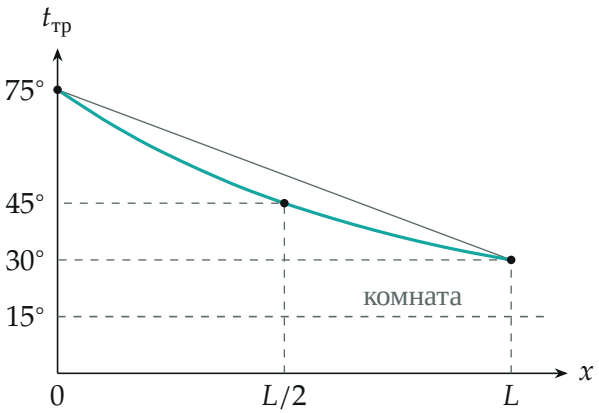
3. Температура посередине. Исключим q: $\dfrac{\theta_2}{\theta_1} = \dfrac{\theta_3}{\theta_2}$, откуда

$$\theta_2 = \sqrt{\theta_1\theta_3}, \qquad t_2 = t + \sqrt{(t_1 - t)(t_3 - t)}.$$

Численно:

$$t_2 = 15\,^\circ\text{C} + \sqrt{60 \cdot 15}\,^\circ\text{C} = 15\,^\circ\text{C} + 30\,^\circ\text{C} = 45\,^\circ\text{C}.$$

Множитель на половине трубы $q = 30/60 = 1/2$: на первой половине вода остывает на $30\,^\circ$, на второй — лишь на $15\,^\circ$, потому что она уже холоднее и тепло уходит медленнее.



Температура воды вдоль трубы (построена по формуле $t_{тр} = t + \theta_1(1/4)^{x/L}$). Серая прямая — неверное «линейное» остывание, оно дало бы посередине 52,5 °C.

Обратите внимание. Среднее арифметическое $(75+30)/2 = 52{,}5\,^\circ\text{C}$ — неверный ответ: оно годилось бы, если бы теплопотери на единицу длины были постоянны. Здесь среднее геометрическое берётся не от самих температур, а от превышений над комнатной: $\sqrt{75 \cdot 30} \approx 47\,^\circ\text{C}$ тоже неверно.

Проверка. Второй способ — через закон убывания. Из п. 1 превышение убывает экспоненциально: $\theta(x) = \theta_1 e^{-kx/(c\mu)}$. Тогда $\theta_3 = \theta_1 e^{-kL/(c\mu)}$ и $\theta_2 = \theta_1 e^{-kL/(2c\mu)} = \sqrt{\theta_1\theta_3} = 30\,^\circ\text{C}$ — то же. Предел: если труба почти не отдаёт тепло ($t_3 \to t_1$), получаем $t_2 \to t_1$; если вода на выходе остыла до комнатной ($t_3 \to t$), то $t_2 \to t$ — при бесконечно длинной трубе вода «почти комнатная» уже на середине. Ответ лежит между t_3 и t_1, как и должно быть. Результат не зависит ни от расхода воды, ни от материала трубы: всё это входит в один множитель q, который находится из t_1 и t_3.

Ответ. $t_2 = t + \sqrt{(t_1 - t)(t_3 - t)} = 45\,^\circ\text{C}$.