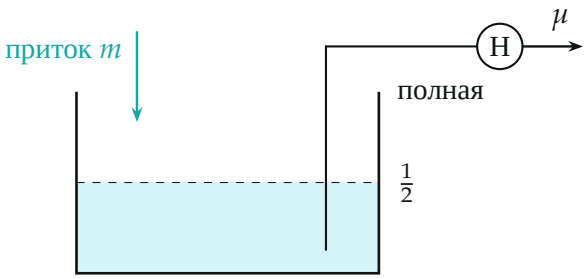
Шахтный водосборник

Задача 2. [ИОШ 2015/16, 9–10 класс, задача 2] В шахтный водосборник — резервуар для сбора шахтных вод перед их откачкой водоотливной установкой — равномерно поступает вода. Первоначально водосборник был пустой, а на откачку воды из камеры водосборника работал один насос. Насос не справлялся с водой, так что за $t_1 = 6$ мин камера заполнилась наполовину. Тогда включили на второй (точно такой же) насос, но вода продолжала прибывать — ещё через $t_2 = 15$ мин камера была заполнена полностью. За какое время камера опустеет, если в момент её полного заполнения включить третий (точно такой же) насос?



Поясняющий рисунок: в камеру равномерно втекает вода, насосы (Н) откачивают её; каждый насос — со своей постоянной скоростью.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на баланс расходов (как «бассейн с трубами»). Вода втекает с постоянной скоростью, каждый насос откачивает тоже с постоянной скоростью, поэтому количество воды в камере меняется линейно со скоростью «приток минус откачка». Два этапа заполнения дают два уравнения на две неизвестные скорости, третий этап — искомое время.

Обозначения. m — масса воды, поступающая в камеру за единицу времени, μ — масса, которую откачивает за единицу времени один насос, M — масса воды в полной камере, t_3 — искомое время.

1. Первый этап (один насос). Закон сохранения массы воды: прирост воды в камере равен притоку минус откачка,

$$(m - \mu)\, t_1 = \frac{M}{2}.$$

2. Второй этап (два насоса).

$$(m - 2\mu)\, t_2 = \frac{M}{2}.$$

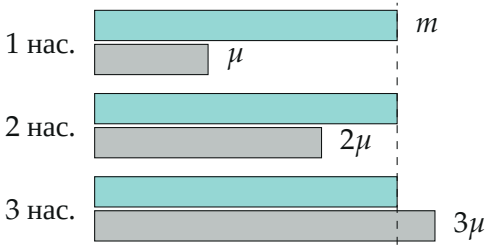


Рис. 1. Приток m (бирюзовый) и откачка (серый) при одном, двух и трёх насосах, в масштабе найденных ниже значений: только при трёх насосах откачка больше притока.

3. Решение системы. Вычтем из первого уравнения, умноженного на t_2, второе, умноженное на t_1 (масса $M/2$ одна и та же):

$$(m - \mu)\, t_1 = (m - 2\mu)\, t_2 \quad \Rightarrow \quad \mu\,(2t_2 - t_1) = m\,(t_2 - t_1)\,,$$

и, подставляя обратно,

$$m = \frac{M\,(2t_2 - t_1)}{2t_1 t_2}, \qquad \mu = \frac{M\,(t_2 - t_1)}{2t_1 t_2}.$$

Числа: $m = \dfrac{24}{180}M = \dfrac{2}{15}\,\dfrac{M}{\text{мин}}$, $\mu = \dfrac{9}{180}M = \dfrac{1}{20}\,\dfrac{M}{\text{мин}}$.

4. Третий этап (три насоса). Теперь откачка больше притока, камера опустошается со скоростью $3\mu - m$:

$$(3\mu - m)\, t_3 = M \quad \Rightarrow \quad t_3 = \frac{M}{3\mu - m} = \frac{2t_1 t_2}{3\,(t_2 - t_1) - (2t_2 - t_1)},$$

$$t_3 = \frac{2t_1 t_2}{t_2 - 2t_1}.$$

$$t_3 = \frac{2 \cdot 6 \cdot 15}{15 - 12} \text{ мин} = 60 \text{ мин}.$$

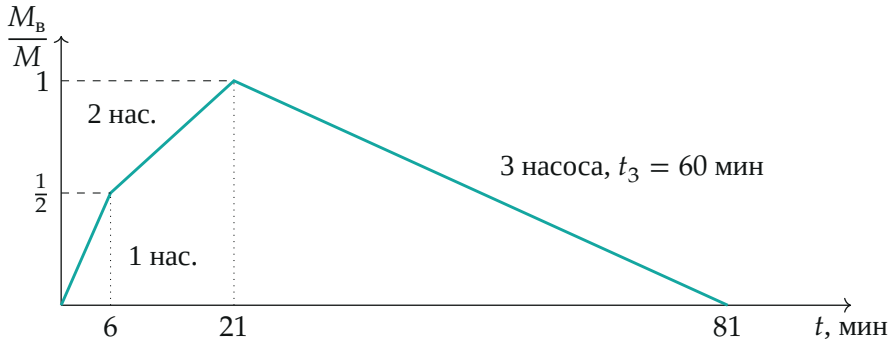


Рис. 2. Доля заполнения камеры во времени (построено по найденным m и μ): наклоны $m - \mu$, $m - 2\mu$ и $-(3\mu - m)$ равны $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{30}$ и $-\frac{1}{60}$ камеры в минуту.

5. Второй способ — в «камерах в минуту». Будем измерять m и μ в долях камеры в минуту. Из этапов: $m - \mu = \frac{1}{2 \cdot 6} = \frac{1}{12}$, $m - 2\mu = \frac{1}{2 \cdot 15} = \frac{1}{30}$. Разность — один насос: $\mu = \frac{1}{12} - \frac{1}{30} = \frac{1}{20}$, тогда $m = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{2}{15}$, и $3\mu - m = \frac{3}{20} - \frac{2}{15} = \frac{1}{60}$: полная камера уходит за 60 мин — то же.



Рис. 3. Скорость изменения доли заполнения камеры (камер в минуту) по этапам. Площади под графиком — изменения заполнения: $+\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$ и -1.

Обратите внимание. Вода продолжает поступать и во время откачки: опустошение идёт со скоростью $3\mu - m$, а не 3μ. Без этого получилось бы $t = \frac{1}{3\mu} \approx 6{,}7$ мин — в девять раз меньше.

Ответ.

$$\boxed{t_3 = \frac{2t_1 t_2}{t_2 - 2t_1} = 60 \text{ мин}}$$

Проверка. Размерность: $\frac{\text{мин}\cdot\text{мин}}{\text{мин}} = \text{мин}$. Предел: при $t_2 \to 2t_1$ второй этап шёл бы так же быстро, как первый, — значит, $\mu \to 0$ (насосы почти ничего не качают) и $t_3 \to \infty$; формула это даёт. Подстановка (рис. 2): $\frac{1}{12}\cdot 6 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{30}\cdot 15 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{60}\cdot 60 = 1$.

Смысл: три насоса лишь немного перекрывают приток (на $\frac{1}{60}$ камеры в минуту), поэтому откачка идёт долго.

Ответ. $t_3 = \dfrac{2t_1 t_2}{t_2 - 2t_1} = 60$ мин.