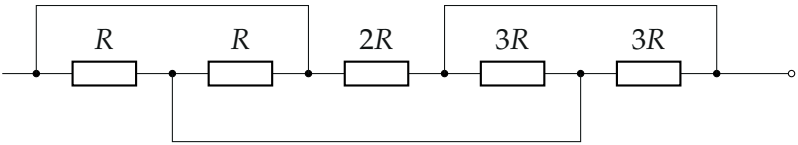
Сопротивление цепи

Задача 3. [ИОШ 2015/16, 9–10 класс, задача 3] Найти сопротивление цепи. Сопротивления резисторов указаны на рисунке.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на эквивалентное сопротивление цепи с перемычками. Провод без резистора соединяет точки с одинаковым потенциалом, поэтому соединённые им точки можно считать одним узлом. Обозначив узлы, видно, что каждый резистор включён между двумя из трёх узлов, — цепь сводится к параллельным и последовательным соединениям.

Обозначения. Узлы (точки, соединённые проводами без резисторов, — один узел): 1 — левый вывод вместе с точкой, куда ведёт верхний левый провод; 2 — две точки, соединённые нижним проводом; 3 — правый вывод вместе с точкой, куда ведёт верхний правый провод (рис. 1).

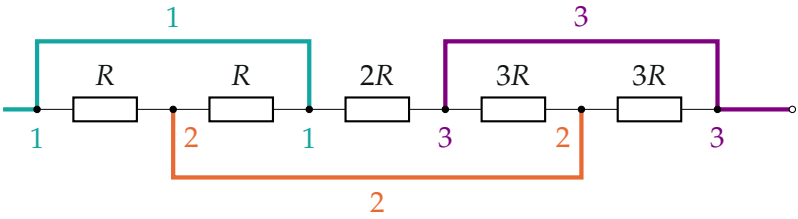


Рис. 1. Провода без резисторов выделены цветом: всё бирюзовое — узел 1, красное — узел 2, фиолетовое — узел 3. Выводы цепи — узлы 1 и 3.

1. Между какими узлами какой резистор. Идём по рисунку слева направо:

- первый R — между узлами 1 и 2; второй R — между узлами 2 и 1;
- $2R$ — между узлами 1 и 3;

- первый $3R$ — между узлами 3 и 2; второй $3R$ — между узлами 2 и 3.

Значит, два резистора R соединены параллельно между узлами 1 и 2, два резистора $3R$ — параллельно между 2 и 3, а $2R$ напрямую соединяет выводы 1 и 3 (рис. 2).

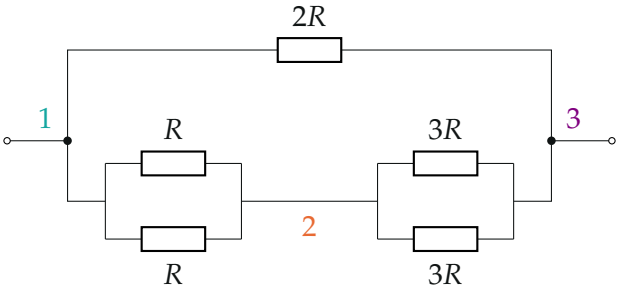


Рис. 2. Та же цепь после «деформации проводов»: между узлами 1 и 2 — два R параллельно, между 2 и 3 — два $3R$ параллельно, и параллельно всему — $2R$.

2. Параллельные пары. Для параллельного соединения складываются проводимости: $\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R}$, $\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{3R} + \frac{1}{3R}$:

$$R_{12} = \frac{R}{2}, \qquad R_{23} = \frac{3R}{2}.$$

3. Последовательно через узел 2. Через узел 2 ничего больше не подключено, ток из R_{12} целиком идёт в R_{23} — соединение последовательное:

$$R_{1\text{-}2\text{-}3} = \frac{R}{2} + \frac{3R}{2} = 2R.$$

4. Параллельно резистору $2R$. Ветвь $2R$ (через узел 2) и резистор $2R$ соединяют одни и те же узлы 1 и 3:

$$R_{\text{общ}} = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R.$$

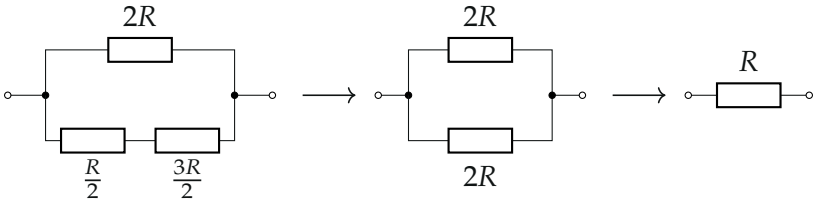


Рис. 3. Свёртка цепи по шагам 2–4: две пары заменены на $R/2$ и $3R/2$, их сумма $2R$ параллельна $2R$, итог — R.

Обратите внимание. Резисторы, стоящие на рисунке друг за другом в одну линию, здесь вовсе не последовательные: перемычки замыкают их концы на другие узлы. Последовательно соединены только элементы, между которыми нет ответвлений.

Ответ.

$$\boxed{R_{\text{общ}} = R}$$

Проверка. Пусть между выводами напряжение U. Через верхний $2R$ течёт $U/(2R)$. Нижняя ветвь $2R$ делит напряжение $1:3$: на паре R — $U/4$, ток через каждый R — $U/(4R)$, всего $U/(2R)$; на паре $3R$ — $3U/4$, ток через каждый — $U/(4R)$, всего $U/(2R)$ — токи сходятся (закон сохранения заряда в узле 2). Полный ток U/R, сопротивление R.

Смысл: перемычки превращают «цепочку» из пяти резисторов в три узла, а дальше считается обычными правилами.

Ответ. $R_{\text{общ}} = R$.