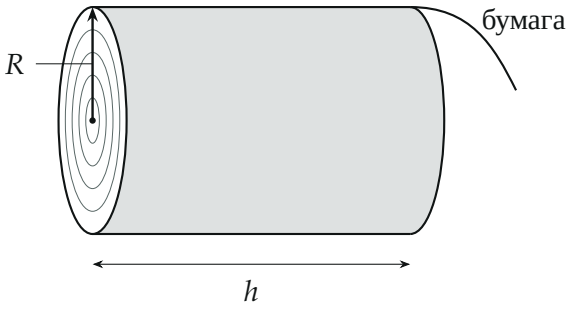
Рулон бумаги

Задача 4. [ИОШ 2015/16, 9–10 класс, задача 4] В типографию завезли бумагу в рулоне. Во время работы типографии рулон разматывают и используют бумагу для печати газет. Через 40 дней работы оказалось, что радиус оставшейся части рулона составляет 2/3 от начального. На сколько дней работы хватит его оставшейся части? Считать, что типография работает с одинаковой интенсивностью, бумага намотана до самой оси рулона.
Указание. Объём цилиндра, в основании которого лежит круг радиуса r и высота которого h, определяется соотношением $V = \pi r^2 h$.



Поясняющий рисунок: рулон радиуса R и высоты h, бумага сматывается с внешней стороны.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на пропорциональность: типография тратит в день одинаковый объём бумаги, поэтому число дней работы пропорционально израсходованному объёму. Бумага сматывается снаружи: за 40 дней ушло кольцо от радиуса R до $\frac{2}{3}R$, а осталась сплошная «шайба» радиуса $\frac{2}{3}R$. Сравниваем их объёмы (высота рулона та же — сравниваем площади торцов).

Обозначения. R — начальный радиус рулона, h — его высота (ширина бумаги), $r = \frac{2}{3}R$ — радиус остатка, $n_1 = 40$ дней, n_2 — искомое число дней, q — объём бумаги, расходуемый за день.

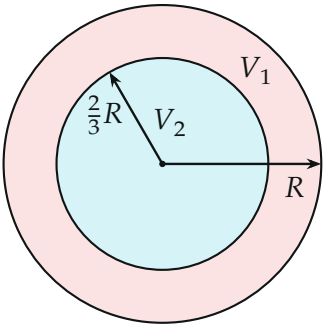


Рис. 1. Торец рулона: розовое кольцо V_1 израсходовано за 40 дней, бирюзовый круг V_2 — остаток.

1. Израсходованный объём. Объём кольца — разность объёмов двух цилиндров одной высоты:

$$V_1 = \pi R^2 h - \pi\left(\frac{2}{3}R\right)^2 h = \pi R^2 h\left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{5}{9}\,\pi R^2 h.$$

2. Остаток.

$$V_2 = \pi\left(\frac{2}{3}R\right)^2 h = \frac{4}{9}\,\pi R^2 h.$$

3. Пропорция. Расход в день постоянен: $V_1 = qn_1$, $V_2 = qn_2$. Делим одно на другое:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{4/9}{5/9} = \frac{4}{5}, \qquad n_2 = \frac{4}{5}\cdot 40 = 32 \text{ дня}.$$

В общем виде, если остался радиус kR: $n_2 = n_1\dfrac{k^2}{1-k^2}$; при $k = \frac{2}{3}$ это $40 \cdot \dfrac{4}{5} = 32$.



Рис. 2. Доли объёма рулона: на $\frac{5}{9}$ ушло 40 дней, значит, $\frac{1}{9}$ хватает на 8 дней, а остаток $\frac{4}{9}$ — на 32 дня.

4. Второй способ — через «девятые доли». Весь рулон — 9 одинаковых долей объёма $\frac{1}{9}\pi R^2 h$. За 40 дней ушло 5 долей, то есть одна доля — на 8 дней. Осталось 4 доли — на $4 \cdot 8 = 32$ дня. Весь рулон хватает на 72 дня.

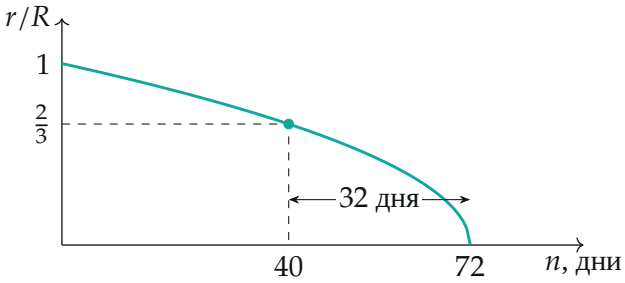


Рис. 3. Радиус рулона по дням, $r = R\sqrt{1 - n/72}$ (объём убывает равномерно, радиус — как корень): к 40-му дню он упал лишь на треть, а дальше убывает всё быстрее.

Обратите внимание. Пропорция «радиус уменьшился на треть за 40 дней — оставшиеся две трети хватит на 80 дней» неверна: расход пропорционален объёму, то есть квадрату радиуса, а не самому радиусу. Внешние витки длиннее внутренних, поэтому они тратятся «медленнее» по радиусу.

Ответ.

$$\boxed{n_2 = n_1 \frac{k^2}{1 - k^2} = 32 \text{ дня}}$$

Проверка. Подстановка в рис. 3: $\sqrt{1 - 40/72} = \sqrt{4/9} = \frac{2}{3}$ — совпало с условием. Предел: если бы за 40 дней радиус почти не изменился ($k \to 1$), остатка хватило бы на очень долго ($n_2 \to \infty$); если бы рулон почти кончился ($k \to 0$), $n_2 \to 0$. Размерность: множитель $\frac{k^2}{1-k^2}$ безразмерен, n_2 — в днях, как и n_1.

Смысл: сплошной круг радиуса $\frac{2}{3}R$ по площади меньше кольца от $\frac{2}{3}R$ до R — поэтому остатка хватит меньше, чем на 40 дней.

Ответ. На 32 дня.