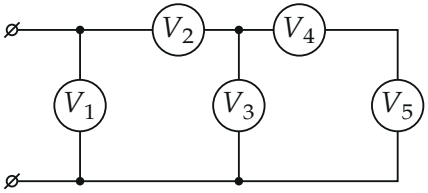
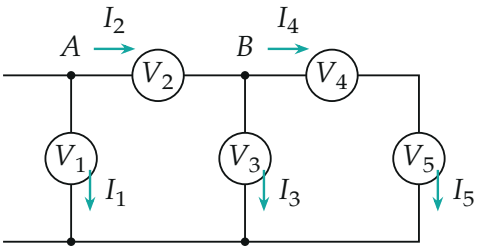
Неисправный вольтметр

Задача 3. [ИОШ 2016/17, отборочный этап, 11 класс, задача 3] Имеется электрическая цепь, содержащая пять стрелочных вольтметров. Все вольтметры одинаковы, но у одного из них сбита шкала и погнута стрелка, и потому он даёт неправильные показания. При подключении к цепи электрического напряжения вольтметры дают следующие показания: $V_1 = 5$ В, $V_2 = 4$ В, $V_3 = 2$ В, $V_4 = V_5 = 1$ В. Определите по этим данным, какой вольтметр неисправен, и каково истинное напряжение на нём.



▲ **Решение. Что происходит.** Вольтметр — это просто резистор с большим сопротивлением R, который показывает напряжение на себе: $U = IR$. Все пять одинаковы, значит, у всех одно R (сопротивление у «сломанного» прибора то же — испорчены только шкала и стрелка). Поэтому цепь — лестница из пяти одинаковых резисторов, и истинные напряжения связаны законами Кирхгофа. Ищем показание, которое этим законам противоречит.

Обозначения. R — сопротивление вольтметра; U_k — истинное напряжение на вольтметре k; $I_k = U_k/R$ — ток через него; узлы A и B — точки ветвления верхнего провода.



Токи через вольтметры. Через V_4 и V_5 идёт один ток; в узле B ток I_2 делится на I_3 и I_4.

1. Вольтметры 4 и 5. Они соединены последовательно, через них идёт один ток $I_4 = I_5$. При одинаковом сопротивлении по закону Ома $U_4 = U_5$. Показания равны (1 В и 1 В) — противоречия нет.

2. Вольтметр 3. Ветвь $V_4 + V_5$ подключена параллельно V_3 между точкой B и нижним проводом. По второму правилу Кирхгофа для контура V_3, V_4, V_5:

$$U_3 = U_4 + U_5.$$

Показания: $2 = 1 + 1$ — выполнено. Если бы неисправен был один из трёх вольтметров $3, 4, 5$, нарушилось бы хотя бы одно из равенств пунктов 1–2 (испорченный прибор показал бы не то число). Значит, V_3, V_4, V_5 исправны, и на самом деле $U_3 = 2$ В, $U_4 = U_5 = 1$ В.

3. Контур с вольтметрами 1, 2, 3. По второму правилу Кирхгофа

$$U_1 = U_2 + U_3.$$

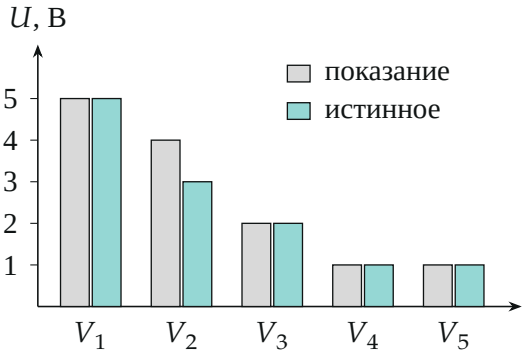
Показания дают $5 \neq 4 + 2 = 6$. Противоречие — неисправен V_1 или V_2. Одного этого равенства мало, чтобы выбрать, нужен ещё закон для токов.

4. Ток через вольтметр 2. По первому правилу Кирхгофа для узла B и закону Ома для каждого вольтметра:

$$I_2 = I_3 + I_4, \qquad \frac{U_2}{R} = \frac{U_3}{R} + \frac{U_4}{R} \quad \Rightarrow \quad U_2 = U_3 + U_4 = 2 + 1 = 3 \text{ В}.$$

Истинное напряжение на V_2 — 3 В, а он показывает 4 В. Он и неисправен.

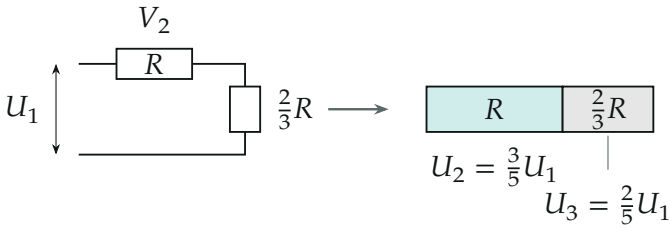
5. Проверка вольтметра 1. Тогда $U_1 = U_2 + U_3 = 3 + 2 = 5$ В — ровно столько показывает V_1, он исправен. Неисправный прибор один, как и сказано в условии.



Показания (серые) и истинные напряжения (бирюзовые). Расходятся только у вольтметра 2: показывает 4 В, на нём 3 В.

Обратите внимание. Сравнения $U_1 = U_2 + U_3$ недостаточно: оно ломается и при неисправном V_1, и при неисправном V_2. Решает только закон для токов — через V_2 идёт ток и в V_3, и в V_4, поэтому $U_2 = U_3 + U_4$. Это возможно лишь потому, что все вольтметры одинаковы: напряжение на каждом пропорционально его току.

Второй способ. Посчитаем цепь целиком. Ветвь $V_4 + V_5$ имеет сопротивление $2R$, параллельно с V_3 даёт $\frac{2}{3}R$; с V_2 последовательно — $\frac{5}{3}R$. Напряжение U_1 делится между V_2 и этим участком в отношении $R : \frac{2}{3}R = 3 : 2$, то есть $U_2 = \frac{3}{5}U_1$, $U_3 = \frac{2}{5}U_1$, $U_4 = U_5 = \frac{1}{5}U_1$. Истинные напряжения относятся как $5 : 3 : 2 : 1 : 1$. Показания $5 : 4 : 2 : 1 : 1$ совпадают со всеми, кроме второго; при $U_1 = 5$ В получаем $U_2 = 3$ В.



Свёртка цепи: ветвь $V_3 \parallel (V_4 + V_5)$ заменена резистором $\frac{2}{3}R$; напряжение U_1 делится в отношении сопротивлений $3 : 2$.

Проверка. Все пять напряжений $5, 3, 2, 1, 1$ В удовлетворяют и обоим правилам Кирхгофа, и закону Ома для одинаковых резисторов; замена любого другого показания вместо V_2 не даёт согласованного набора (если неисправен V_1, то $U_2 = 4$ В требует $U_3 + U_4 = 4$, а исправные показывают 3).

Ответ. Неисправен вольтметр 2; истинное напряжение на нём $U_2 = 3$ В.