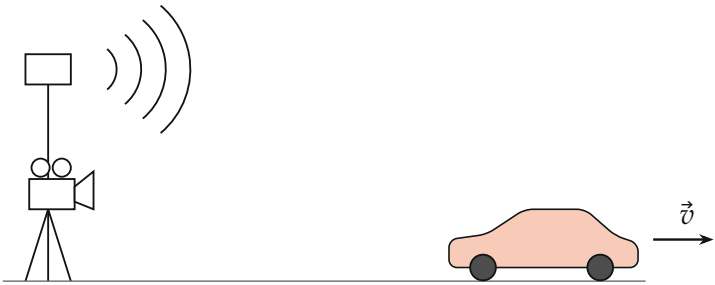
Радар ДПС и эффект Доплера

Задача 4. [ИОШ 2016/17, отборочный этап, 11 класс, задача 4] На обочине шоссе работниками дорожно-патрульной службы установлены радар и фотофиксирующая камера. Радар посылает радиосигнал с частотой $\nu_0 = 24 \cdot 10^9$ Гц, а регистрирует сигнал, частота которого отличается от частоты излучённого сигнала на величину $\Delta\nu = 3 \cdot 10^3$ Гц. Должен ли радар дать команду камере сфотографировать машину, чтобы оштрафовать водителя как нарушителя правил дорожного движения, если максимальная разрешённая скорость на рассматриваемом участке дороги — 60 км/ч, а штрафуются нарушители, начиная со скорости 81 км/ч? Машина едет от радара, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Больше или меньше частота принятого сигнала частоты посланного?



▲ **Решение. Что происходит.** Радар измеряет скорость по эффекту Доплера: волна отражается от движущейся машины, и частота отражённой волны отличается от посланной. Машина удаляется, поэтому каждый следующий гребень волны догоняет её дольше и возвращается с большего расстояния — гребни принятого сигнала идут реже, частота меньше. Найдём точную связь частот через время прихода начала и конца сигнала, затем скорость.

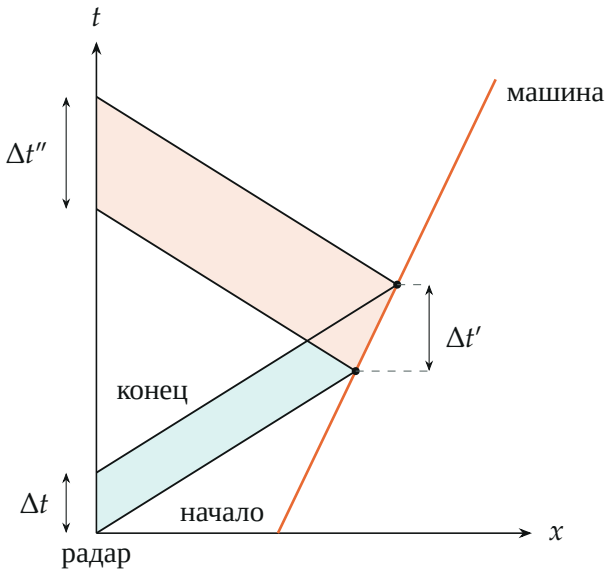
Обозначения. v — скорость машины (от радара); Δt — длительность посланного сигнала, в нём $\nu_0 \Delta t$ колебаний; $\Delta t'$ — время, за которое сигнал целиком отражается от машины; $\Delta t''$ — длительность принятого сигнала; ν' — принятая частота.

1. Отражение сигнала от удаляющейся машины. Пусть начало сигнала дошло до машины в момент t. Конец сигнала в этот момент отстаёт

от машины на $c\,\Delta t$ (весь сигнал — отрезок длиной $c\Delta t$). Конец догоняет машину со скоростью сближения $c - v$:

$$\Delta t' = \frac{c\,\Delta t}{c - v}.$$

За это время машина отъехала на $v\Delta t'$, и конец отражается дальше от радара, чем начало.



Мировые линии на плоскости (x, t) (скорость машины для наглядности взята $0{,}3c$). Посланный сигнал (бирюзовая полоса) длится Δt, отражённый (морковная) — $\Delta t'' > \Delta t$: гребни приходят реже.

2. Длительность принятого сигнала. Отражённый конец должен пройти обратно на $v\Delta t'$ больше, чем начало, и задержится ещё на $v\Delta t'/c$. Поэтому принятый сигнал длится

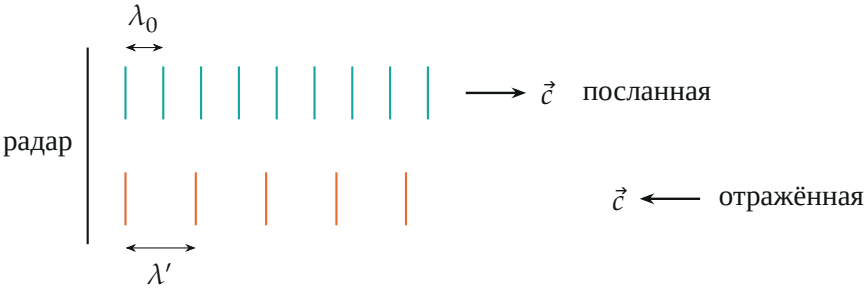
$$\Delta t'' = \Delta t' + \frac{v\,\Delta t'}{c} = \frac{c + v}{c} \cdot \frac{c\,\Delta t}{c - v} = \frac{c + v}{c - v}\,\Delta t.$$

3. Принятая частота. Число колебаний при отражении не меняется:

$\nu'\Delta t'' = \nu_0\Delta t$, откуда

$$\nu' = \frac{c-v}{c+v}\,\nu_0 < \nu_0.$$

Частота принятого сигнала *меньше* посланной: машина удаляется.



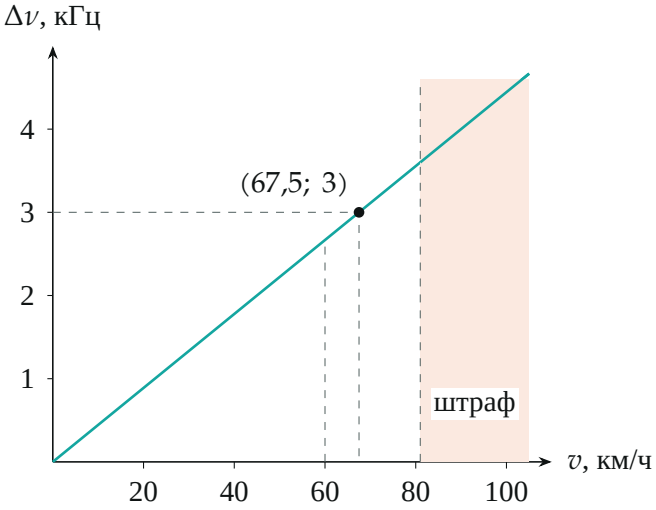
Гребни посланной и отражённой волн (сдвиг преувеличен): от удаляющейся машины гребни возвращаются реже, длина волны $\lambda' > \lambda_0$, частота $\nu' < \nu_0$.

4. Скорость машины. Сдвиг частоты

$$\Delta\nu = \nu_0 - \nu' = \nu_0\left(1 - \frac{c-v}{c+v}\right) = \frac{2v}{c+v}\,\nu_0 \quad\Rightarrow\quad v = \frac{\Delta\nu}{2\nu_0 - \Delta\nu}\,c.$$

Сдвиг $\Delta\nu = 3\cdot10^3$ Гц ничтожен рядом с $\nu_0 = 2{,}4\cdot10^{10}$ Гц (отношение 10^{-7}), так что в знаменателе $\Delta\nu$ можно отбросить:

$$v \approx \frac{\Delta\nu}{2\nu_0}\,c = \frac{3\cdot10^3\cdot3\cdot10^8}{2\cdot24\cdot10^9}\ \text{м/с} = 18{,}75\ \text{м/с} = 67{,}5\ \text{км/ч}.$$



Сдвиг частоты пропорционален скорости: $\Delta\nu = 2\nu_0 v/c$. Порогу штрафа 81 км/ч отвечает 3,6 кГц; измерено 3 кГц — машина левее порога.

5. Решение для камеры. $60 < 67{,}5 < 81$ км/ч: водитель превышает разрешённую скорость, но не достигает скорости, с которой штрафуют. Радар не должен давать команду камере.

Обратите внимание. Сдвиг частоты двойной: машина сначала «принимает» волну пониженной частоты как движущийся приёмник, а затем отражает её как движущийся источник. Поэтому в формуле $2v$, а не v. У организаторов в решении вывод сделан для машины, едущей *навстречу* (частота растёт), и арифметическая ошибка (83,3 км/ч вместо 67,5 км/ч, отсюда вывод «фотографировать»); модуль скорости от направления не зависит, а знак сдвига — зависит.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Гц}}{\text{Гц}} \cdot$ м/с — скорость. Предел: при $v = 0$ получаем $\nu' = \nu_0$, сдвига нет. Точная формула даёт $v = 18{,}750000\ldots$ м/с, отличие от приближённой — в восьмом знаке.

Ответ. Частота принятого сигнала меньше посланной: $\nu' = \dfrac{c - v}{c + v}\,\nu_0$. Скорость машины $v = \dfrac{c\,\Delta\nu}{2\nu_0} = 18{,}75$ м/с $= 67{,}5$ км/ч < 81 км/ч — фотографировать машину не нужно.