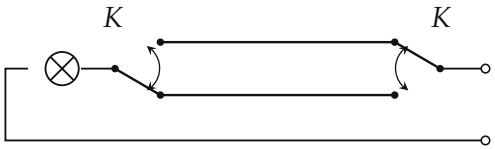
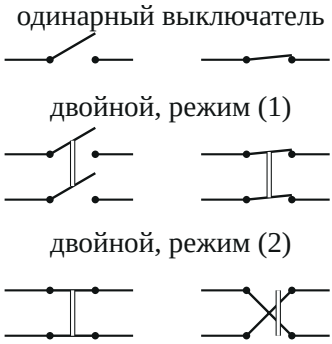
Лампа и пять переключателей

Задача 5. [ИОШ 2016/17, отборочный этап, 11 класс, задача 5] Известна цепь, в которой лампу можно включать и выключать любым из выключателей K_1 и K_2, причём независимо от положения второго (см. рисунок слева). На основе приведённой цепи построить цепь, в которой включение-выключение лампочки можно осуществлять любым из пяти выключателей независимо от положения четырёх остальных. Цепь должна состоять только из проводов и выключателей — одинарных или двойных (см. рисунок справа): одинарный выключатель соединяет или разрывает один провод, двойной выключатель может работать в двух режимах: (1) одновременно соединять или разрывать два провода двухпроводной линии, (2) одновременно переключать соединение двух проводов двухпроводной линии.



Известная цепь: лампа и два выключателя K (K_1 слева, K_2 справа); справа — выводы к источнику.



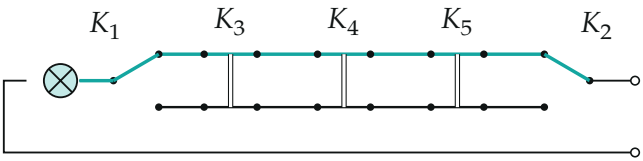
Виды выключателей: слева — разомкнут (прямо), справа — замкнут (накрест). Двойная тонкая линия — механическая связь двух рычагов.

▲ **Решение. Что происходит.** В известной цепи каждый из выключателей K_1, K_2 подключает свой конец двухпроводной линии либо к верхнему, либо к нижнему проводу. Ток идёт, только когда оба конца подключены к *одному и тому же* проводу. Щелчок любого из них меняет «свой» провод на другой — совпадение превращается в несовпадение и наоборот, поэтому лампа меняет состояние при любом положении второго. Задача на логику переключений: нужен элемент, который тоже меняет провод на противоположный, но стоит посередине линии.

Обозначения. K_1, K_2 — выключатели на концах линии (как в известной цепи), K_3, K_4, K_5 — выключатели, которые надо добавить; «верх» и «низ» — провода двухпроводной линии.

1. Почему одинарный выключатель и режим (1) не подходят. Выключатель, который *разрывает* линию (одинарный или двойной в режиме (1)), в разомкнутом положении гасит лампу при любом положении остальных — остальные выключатели тогда ею не управляют. Значит, разрывать цепь нельзя: каждый добавленный выключатель должен оставлять оба провода целыми и лишь менять их местами. Это двойной выключатель в режиме (2): «прямо» — верхний провод идёт в верхний, нижний в нижний; «накрест» — верхний переходит в нижний и наоборот.

2. Цепь. Разрежем линию известной цепи и вставим в неё последовательно три двойных выключателя K_3, K_4, K_5 в режиме (2). Вместе с K_1 и K_2 выключателей пять.

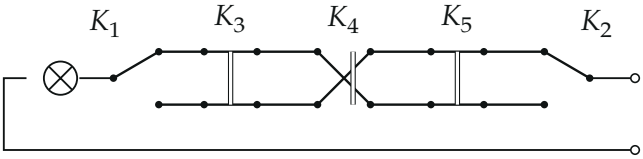


Предлагаемая цепь: K_1 на верхнем проводе, K_3, K_4, K_5 прямо, K_2 на верхнем проводе. Путь тока выделен, лампа горит.

3. Почему любой из пяти включает и выключает лампу. Проследим, по какому проводу идёт ток от K_1 к K_2. K_1 выбирает начальный провод. Каждый крест в положении «накрест» меняет провод на противоположный, в положении «прямо» оставляет. Лампа горит, если провод,

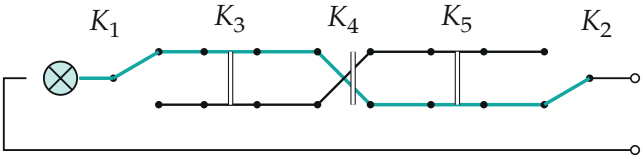
на котором оказался ток у K_2, совпадает с тем, к которому подключён K_2. Иначе говоря, горит, когда число «перемен провода» (положение K_1 «низ», каждый крест «накрест», положение K_2 «низ») чётное.

Щелчок *любого* из пяти выключателей меняет это число ровно на единицу, то есть меняет чётность — лампа меняет состояние, как бы ни стояли остальные четыре. Пример: переключим K_4 на «накрест» — ток приходит к K_2 по нижнему проводу, а K_2 подключён к верхнему, лампа гаснет.



Переключён K_4: ток приходит к K_2 по нижнему проводу, цепь разорвана, лампа не горит.

Теперь щёлкнем любым другим, например K_2: он подключается к нижнему проводу, и лампа снова горит.



Переключён ещё и K_2: ток снова замкнут через нижний провод, лампа горит.

Обратите внимание: в такой цепи лампа никогда «не застревает»: в каждом из $2^5 = 32$ положений пяти выключателей щелчок любого из них меняет состояние лампы (мы перебрали все 32 положения и все 5 щелчков). Число средних двойных выключателей — на два меньше общего числа: для N выключателей нужно $N - 2$ двойных в режиме (2). У организаторов «во втором варианте — четыре»: это вариант с шестью выключателями.

Проверка. При $N = 2$ средних выключателей нет — получаем известную цепь. При $N = 3$ один крест посередине — известная схема

управления светом с трёх мест (два крайних переключателя и один «перекрёстный»). Наша цепь — та же схема с тремя крестами вместо одного.

Смысл: крайние выключатели выбирают провод, средние его меняют; лампа следит за чётностью всех щелчков, поэтому каждый щелчок ею управляет.

Ответ. Между крайними выключателями K_1 и K_2 известной цепи вставить в линию последовательно три двойных выключателя в режиме (2) (переключение проводов «прямо / накрест»). Каждый щелчок любого из пяти меняет провод, по которому ток приходит к K_2, и тем самым включает или выключает лампу.