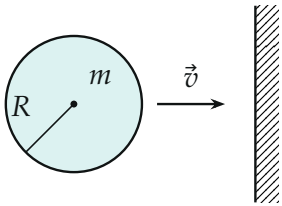
Время столкновения упругого шара со стенкой

Задача 6. [ИОШ 2016/17, отборочный этап, 11 класс, задача 6] Оценить время столкновения упругого шара с закреплённой стенкой. Шар имеет массу $m = 1$ кг и движется со скоростью $v = 10$ м/с перпендикулярно стенке. Радиус шара $R = 3$ см. Модуль Юнга материала шара $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па. Указание. Модуль Юнга определяется так. При сжатии или растяжении цилиндрического стержня длиной l и площадью поперечного сечения S силой F его удлинение Δl определяется соотношением $\Delta l = Fl/(ES)$, где величина E, которая зависит только от материала стержня, но не зависит от его размеров и приложенной силы, и есть модуль Юнга.



Поясняющий рисунок: шар массой m и радиусом R летит перпендикулярно закреплённой стенке.

▲ **Решение. Что происходит.** Шар касается стенки и начинает сплющиваться. Сила упругости со стороны стенки тормозит его, кинетическая энергия переходит в энергию деформации; когда шар остановился, деформация максимальна, затем шар распрямляется и отлетает с той же скоростью. Это половина колебания «груза на пружине», где груз — сам шар, а пружина — его деформированная часть. Задача на оценку: жёсткость шара строим из модуля Юнга и размера шара, время — из периода пружинного маятника.

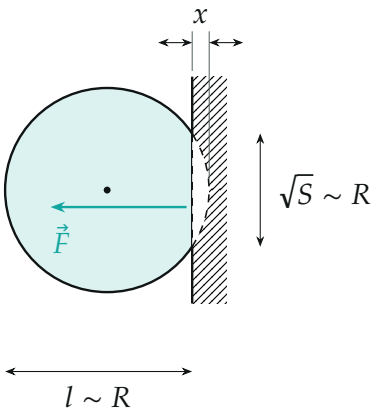
Обозначения. x — деформация шара (насколько сблизились центр шара и стенка), F — сила упругости со стороны стенки, k — эффективная жёсткость шара, Δt — время столкновения.

1. Жёсткость шара по формуле для стержня. Жёсткость — коэффициент пропорциональности между силой и деформацией, $F = kx$. Для

стержня из указания $F = \dfrac{ES}{l}\Delta l$, то есть

$$k_{\text{стерж}} = \frac{ES}{l}.$$

Шар — не стержень, но по порядку величины его можно считать «стержнем» длиной $l \sim R$ и сечением $S \sim R^2$: сжимается вся толща шара, а других размеров у шара нет.



Шар прижат к стенке: пунктир — часть недеформированного шара, «срезанная» стенкой (деформация для наглядности сильно увеличена); x — деформация. Сжимается область размером порядка R с сечением порядка R^2.

Подставляем:

$$k \sim \frac{ER^2}{R} = ER = 2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}03 = 6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}.$$

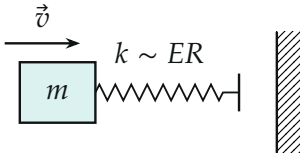
2. Модель «груз на пружине». Заменим шар грузом m на пружине жёсткостью k. Второй закон Ньютона для шара в проекции на ось, направленную от стенки, пока он касается стенки:

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Это уравнение гармонических колебаний с периодом $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Столкновение — от касания ($x = 0$, скорость к стенке) до отрыва ($x = 0$,

скорость от стенки), это половина колебания:

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} \sim \pi\sqrt{\frac{m}{ER}}.$$



Модель: груз массой m с пружиной жёсткостью k налетает на стенку. Время контакта — половина периода колебаний.

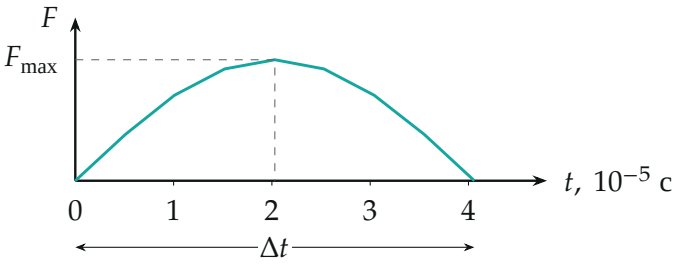
3. Число.

$$\Delta t \sim \pi\sqrt{\frac{1}{6\cdot 10^9}}\ \text{с} \approx 4\cdot 10^{-5}\ \text{с} \sim 10^{-4}\ \text{с}.$$

Скорость v в ответ не вошла: период гармонических колебаний не зависит от амплитуды. От скорости зависят только наибольшая деформация и сила. По закону сохранения энергии $\frac{mv^2}{2} = \frac{kx_{\max}^2}{2}$:

$$x_{\max} = v\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 1{,}3\cdot 10^{-4}\ \text{м}, \qquad F_{\max} = kx_{\max} \approx 8\cdot 10^5\ \text{Н}.$$

Деформация — десятая доля миллиметра, много меньше R: колебания действительно малые, модель упругости применима.



Сила удара в модели «груз на пружине»: половина синусоиды, точки вычислены для $k = ER$. Больше v — выше горб, но не шире.

4. Второй способ — через скорость звука. Пока шар не «узнал» о стенке весь, он не может остановиться целиком: сигнал о касании бежит по шару со скоростью звука $c = \sqrt{E/\rho}$ и должен дойти до дальней стороны и вернуться, то есть пройти $\sim 2R$:

$$\Delta t \sim \frac{2R}{c} = 2R\sqrt{\frac{\rho}{E}} = 2\sqrt{\frac{\rho R^3}{ER}} \sim 2\sqrt{\frac{m}{ER}},$$

так как $\rho R^3 \sim m$. Та же комбинация $\sqrt{m/(ER)} \approx 1{,}3 \cdot 10^{-5}$ с, отличие — только в числовом множителе.

Обратите внимание: в оценке важен порядок, а не множитель: «$l \sim R$, $S \sim R^2$» верно с точностью до множителя порядка единицы, поэтому $4 \cdot 10^{-5}$ с и $8 \cdot 10^{-5}$ с (у организаторов — полный период $2\pi\sqrt{m/(ER)}$) дают один ответ $\sim 10^{-4}$ с. Точная теория упругого контакта шаров (Герц) даёт для этих данных $\approx 1 \cdot 10^{-4}$ с и слабую зависимость от скорости, $\Delta t \propto v^{-1/5}$: жёсткость контакта растёт с деформацией, потому что растёт пятно касания. В грубой оценке этой зависимостью пренебрегают.

Проверка. Размерность: $[m/(ER)] = \dfrac{\text{кг}}{\text{Па} \cdot \text{м}} = \dfrac{\text{кг}}{\text{Н/м}} = \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{м/с}^2} = \text{с}^2$ — корень даёт секунды. Предел: $E \to \infty$ (абсолютно твёрдый шар) — $\Delta t \to 0$, мгновенный удар, как и должно быть; тяжелее шар — дольше удар.

Смысл: удар упругих тел длится доли миллисекунды и почти не зависит от скорости — поэтому сила удара огромна (сотни тысяч ньютонов) при деформации в десятые доли миллиметра.

Ответ. $\Delta t \sim \pi\sqrt{\dfrac{m}{ER}} \sim 10^{-4}$ с (по модели «груз на пружине» $\approx 4 \cdot 10^{-5}$ с); от скорости шара время столкновения практически не зависит.