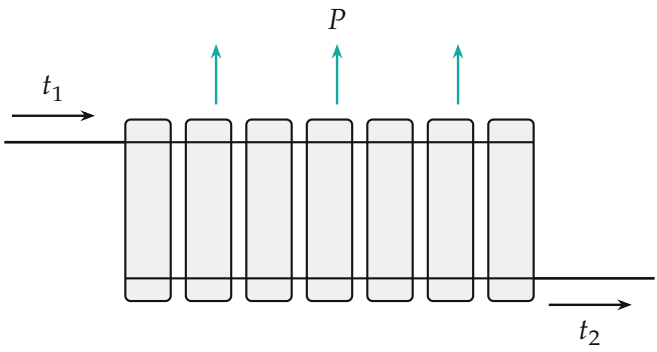
Расход воды в батарее отопления

Задача 3. [ИОШ 2016/17, отборочный этап, 9 класс, задача 3] Определить расход воды в батарее водяного отопления, если вода входит в батарею с температурой $t_1 = 80°\text{C}$, выходит — с температурой $t_2 = 70°\text{C}$, и батарея обеспечивает мощность $P = 4{,}5$ кВт. Удельная теплоёмкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град).

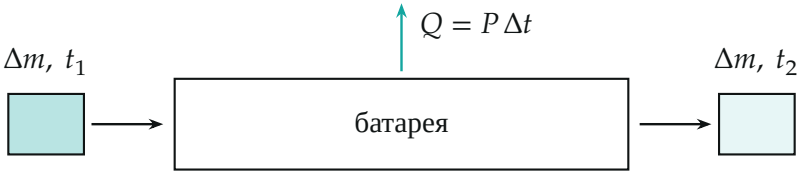


Поясняющий рисунок. Горячая вода входит в батарею при t_1, выходит остывшей до t_2; разница энергии уходит в комнату с мощностью P.

▲ **Решение. Что происходит.** Батарея работает в установившемся режиме: каждую секунду через неё проходит одна и та же масса воды, и каждая порция остывает от t_1 до t_2. Теплота, которую эти порции отдают за секунду, и есть мощность батареи. Это задача на уравнение теплового баланса для потока: считаем не тело, а порцию воды за малое время.

Обозначения. μ — расход, масса воды, проходящей через батарею за единицу времени (кг/с); Δt — малый промежуток времени; $\Delta m = \mu\,\Delta t$ — масса порции воды, прошедшей за это время.

1. Какая порция проходит за время Δt. Возьмём малое время Δt. За него в батарею входит порция массой $\Delta m = \mu\,\Delta t$ при температуре t_1, и столько же воды выходит при t_2 (вода не накапливается: режим установился). Значит, итог за Δt такой же, как если бы порция Δm остыла от t_1 до t_2.



За время Δt входит порция Δm при t_1 и выходит такая же при t_2; батарея отдаёт за это время теплоту Q.

2. Тепловой баланс порции. Теплота, отданная порцией воды при остывании от t_1 до t_2 (теплоёмкость воды не зависит от температуры в этом диапазоне):

$$Q = c\,\Delta m\,(t_1 - t_2) = c\,\mu\,\Delta t\,(t_1 - t_2).$$

Вся она уходит в комнату (батарея в установившемся режиме сама не нагревается), а мощность — это теплота за единицу времени:

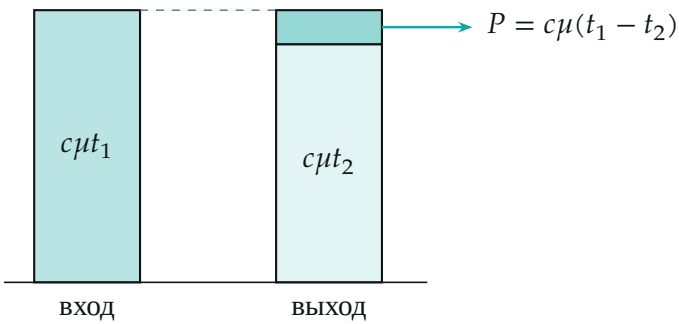
$$P = \frac{Q}{\Delta t} = c\,\mu\,(t_1 - t_2).$$

Время Δt сократилось, как и должно быть в установившемся режиме.

3. Расход. Неизвестным остался только μ:

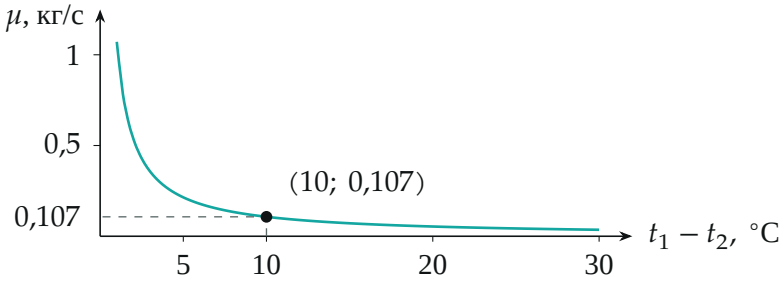
$$\mu = \frac{P}{c\,(t_1 - t_2)} = \frac{4{,}5 \cdot 10^3}{4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 10}\ \text{кг/с} \approx 0{,}107\ \text{кг/с}.$$

Это около 6,4 кг воды в минуту, или примерно 390 л в час.



Энергия, которую вода приносит и уносит за секунду (высота столбца пропорциональна температуре, отсчёт от $0°C$). Разница столбцов — верхний тёмный кусок — уходит в комнату.

Обратите внимание. Мощность задаёт *поток* энергии, а не запас. Поэтому и вода нужна потоком — масса за секунду, а не масса воды в батарее: объём самой батареи в ответ не входит.



Расход, нужный для мощности 4,5 кВт, в зависимости от того, насколько остывает вода в батарее (точки — по формуле $\mu = P/(c(t_1 - t_2))$). Отмечена точка задачи.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Вт}}{\text{Дж/(кг·град)} \cdot \text{град}} = \dfrac{\text{Дж/с}}{\text{Дж/кг}} = \text{кг/с}$. Предел: если вода в батарее почти не остывает ($t_1 - t_2 \to 0$), для той же мощности нужен бесконечный расход — так и должно быть, иначе вода ничего не отдаёт. Обратный счёт: $0{,}107 \cdot 4200 \cdot 10 \approx 4500$ Вт. Смысл: чем сильнее остывает вода в батарее, тем меньше её нужно прокачивать.

Ответ. $\mu = \dfrac{P}{c\,(t_1 - t_2)} \approx 0{,}107$ кг/с.