Лампа и пять переключателей

Задача 4. [ИОШ 2016/17, отборочный этап, 9 класс, задача 4] Известна цепь, в которой лампу можно включать и выключать любым из выключателей K_1 и K_2, причём независимо от положения второго (см. рисунок слева). На основе приведённой цепи построить цепь, в которой включение-выключение лампочки можно осуществлять любым из пяти выключателей независимо от положения четырёх остальных. Цепь должна состоять только из проводов и выключателей — одинарных или двойных (см. рисунок справа): одинарный выключатель соединяет или разрывает один провод, двойной выключатель может работать в двух режимах: (1) одновременно соединять или разрывать два провода двухпроводной линии, (2) одновременно переключать соединение двух проводов двухпроводной линии.

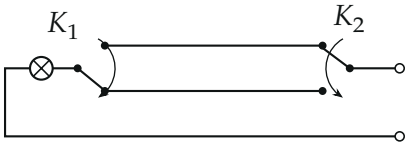


Рисунок слева: известная цепь с выключателями K_1 и K_2.

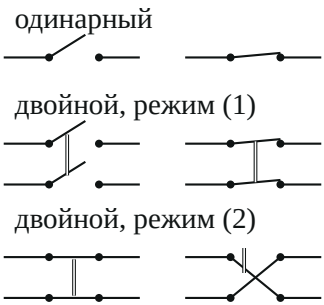


Рисунок справа: одинарный и двойной выключатели (в каждом режиме — два положения).

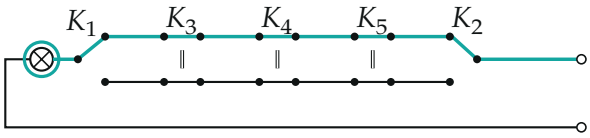
▲ **Решение. Что происходит.** В известной цепи K_1 и K_2 — переключатели: каждый подключает свой конец к верхнему или к нижнему проводу

двухпроводной линии. Лампа горит, когда оба выбрали один и тот же провод. Главная идея: вставить в линию между ними двойные выключатели во втором режиме — каждый из них либо пропускает провода прямо, либо меняет их местами. Задача на логику цепи: следим, по какому проводу идёт путь тока.

Обозначения. Положение переключателя K_1 или K_2 — номер выбранного провода: 0 — верхний, 1 — нижний. Положение двойного выключателя K_3, K_4, K_5: 0 — «прямо», 1 — «накрест». Обозначим их $s_1, \ldots, s_5$.

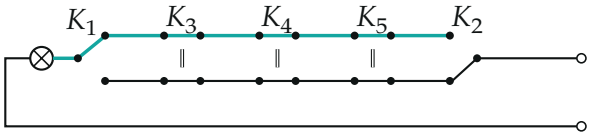
1. Почему работает известная цепь. Ток от лампы через K_1 попадает на провод s_1. До K_2 он доходит по тому же проводу. Цепь замкнута, если K_2 подключён к этому же проводу: $s_2 = s_1$. Переключение любого из двух меняет равенство на неравенство и наоборот — лампа меняет состояние при любом положении другого.

2. Цепь из пяти выключателей. Разрежем линию в трёх местах и вставим три двойных выключателя во втором режиме: K_1 — K_3 — K_4 — K_5 — K_2. Каждый K_3, K_4, K_5 в положении «накрест» переводит путь тока с одного провода на другой. После них путь идёт по проводу s_1, если число перекрещиваний чётное, и по другому проводу, если нечётное. Лампа горит, когда K_2 стоит на этом проводе.



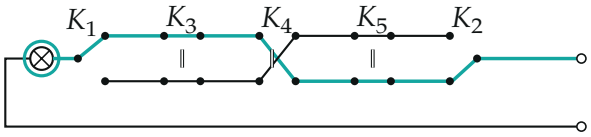
Все двойные — «прямо», K_1 и K_2 на верхнем проводе: путь тока (бирюзовый) замкнут, лампа горит.

3. Любой выключатель меняет состояние лампы. Переведём, например, K_2 на нижний провод: путь тока по-прежнему приходит по верхнему, цепь разорвана — лампа гаснет.



Переключили K_2: путь тока обрывается на верхнем проводе, лампа погасла.

Теперь переключим K_4 «накрест»: путь тока переходит на нижний провод и как раз приходит туда, где стоит K_2, — лампа снова горит.



Переключили K_4: путь тока перешёл на нижний провод, цепь снова замкнута.

Общее правило: каждое переключение любого из пяти выключателей меняет на противоположное ровно одно: либо провод, по которому приходит путь тока, либо провод, выбранный K_2. Поэтому совпадение («горит») сменяется несовпадением («не горит») и наоборот — при любых положениях остальных четырёх. Говоря языком логики, лампа горит, когда $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5$ — чётное число.

Обратите внимание. Двойной выключатель в первом режиме сюда не годится: он размыкает оба провода сразу, и лампа гаснет при любом положении остальных — включить её другим выключателем уже нельзя. Одинарные тоже не нужны.

Проверка. Перебор всех $2^5 = 32$ положений по правилу чётности: при смене любого одного выключателя состояние лампы меняется во всех 16 парах положений. Для n выключателей нужны два переключателя на концах и $n-2$ двойных во втором режиме; при $n = 2$ получается известная цепь. Смысл: двойной выключатель во втором режиме — это «переключатель проводов», и любое их число в линии сохраняет свойство исходной цепи.

Ответ. Между K_1 и K_2 последовательно включить в двухпроводную линию три двойных выключателя во втором режиме (каждый пропускает провода прямо или меняет их местами); каждое переключение любого из пяти выключателей меняет состояние лампы.