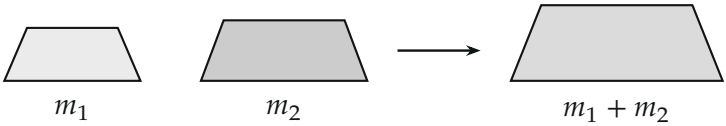
Сплавы платины, золота и серебра

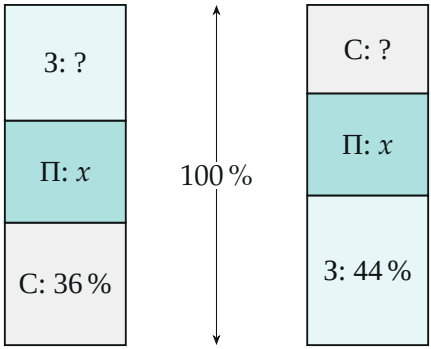
Задача 5. [ИОШ 2016/17, отборочный этап, 9 класс, задача 5] Имеется два сплава, оба состоящие из платины, золота и серебра, но с разным процентным содержанием компонент. Известно, что первый сплав содержит $\eta_{\text{С}}^{(1)} = 36\%$ серебра, второй — $\eta_{\text{З}}^{(2)} = 44\%$ золота, а процентное содержание платины в них одинаково: $\eta_{\text{П}}^{(1)} = \eta_{\text{П}}^{(2)}$. Сплавляют $m_1 = 1{,}5$ кг первого сплава и $m_2 = 2{,}5$ кг второго. При этом оказалось, что в новом сплаве содержится $m_{\text{П}} = 1{,}2$ кг платины. Найти массу золота и серебра в новом сплаве.



Поясняющий рисунок. Два слитка разного состава сплавляют в один.

▲ **Решение.** **Что происходит.** При сплавлении масса каждого металла сохраняется: платина нового сплава — это платина первого плюс платина второго, так же для золота и серебра. Главная идея: раз доля платины в обоих сплавах одна и та же, такой же она будет и в новом сплаве, и её можно найти из данных. Это задача на закон сохранения массы каждого компонента.

Обозначения. η — доля компонента по массе, верхний индекс — номер сплава, нижний — металл (П, З, С); $x = \eta_{\text{П}}^{(1)} = \eta_{\text{П}}^{(2)}$ — общая доля платины; $m_{\text{З}}$, $m_{\text{С}}$ — искомые массы золота и серебра в новом сплаве.



Состав каждого сплава в процентах по массе. Известно по одной доле в каждом и то, что доли платины (бирюзовые) одинаковы.

1. Доля платины. Закон сохранения массы платины при сплавлении:

$$m_{\text{П}} = x\,m_1 + x\,m_2 = x\,(m_1 + m_2),$$

откуда

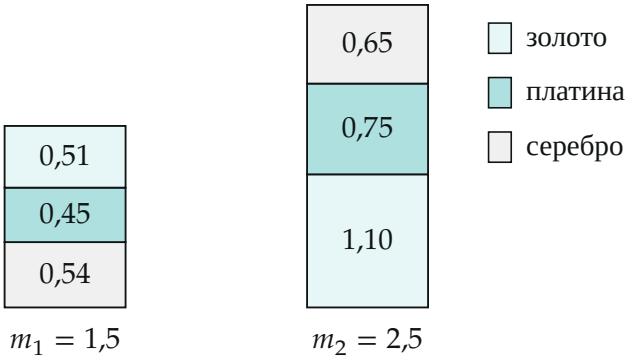
$$x = \frac{m_{\text{П}}}{m_1 + m_2} = \frac{1{,}2}{1{,}5 + 2{,}5} = 0{,}30 = 30\,\%.$$

Одинаковая доля и позволила вынести x за скобку: смешивая два сплава с одной долей платины, получаем сплав с той же долей.

2. Остальные доли в исходных сплавах. В каждом сплаве три металла, и их доли в сумме дают 100 %:

$$\eta_{\text{З}}^{(1)} = 100\,\% - \eta_{\text{С}}^{(1)} - x = 100 - 36 - 30 = 34\,\%,$$

$$\eta_{\text{С}}^{(2)} = 100\,\% - \eta_{\text{З}}^{(2)} - x = 100 - 44 - 30 = 26\,\%.$$

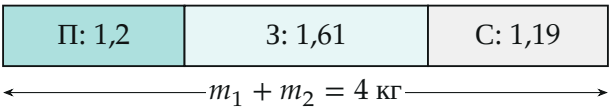


Те же сплавы в килограммах: доли из пункта 2, умноженные на массы слитков. Высота столбца пропорциональна массе.

3. Массы золота и серебра в новом сплаве. Закон сохранения массы золота и массы серебра при сплавлении:

$$m_3 = \eta_3^{(1)} m_1 + \eta_3^{(2)} m_2 = 0{,}34 \cdot 1{,}5 + 0{,}44 \cdot 2{,}5 = 0{,}51 + 1{,}10 = 1{,}61 \text{ кг},$$

$$m_\text{C} = \eta_\text{C}^{(1)} m_1 + \eta_\text{C}^{(2)} m_2 = 0{,}36 \cdot 1{,}5 + 0{,}26 \cdot 2{,}5 = 0{,}54 + 0{,}65 = 1{,}19 \text{ кг}.$$



Новый сплав, массы в килограммах. Длина участка пропорциональна массе металла.

Обратите внимание. Нельзя усреднять проценты простым средним: доля золота в новом сплаве не равна $(34 + 44)/2 = 39\,\%$, потому что слитки разной массы. Складывать нужно массы, а не проценты. Только для платины это всё равно — её доли в обоих слитках одинаковы.

Проверка. Сумма масс трёх металлов: $1{,}2 + 1{,}61 + 1{,}19 = 4{,}0$ кг $= m_1 + m_2$, как и должно быть. Второй способ для серебра: серебро — это всё, что не платина и не золото, $4{,}0 - 1{,}2 - 1{,}61 = 1{,}19$ кг. Смысл: золота больше, потому что в новый сплав больше вошло второго, «золотого», слитка.

Ответ. $m_3 = \eta_3^{(1)} m_1 + \eta_3^{(2)} m_2 = 1{,}61$ кг; $m_\text{C} = \eta_\text{C}^{(1)} m_1 + \eta_\text{C}^{(2)} m_2 = 1{,}19$ кг.