Брусок на тележке

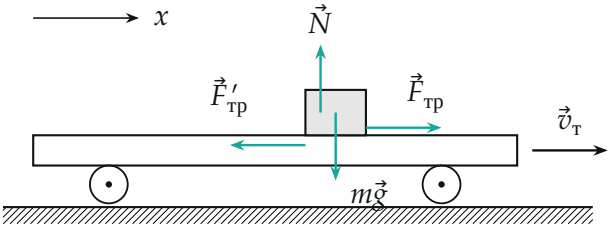
Задача 6. [ИОШ 2016/17, отборочный этап, 9 класс, задача 6] На передний край тележки массой M, движущейся со скоростью v_0 по гладкой горизонтальной поверхности, кладут брусок массой m. Начальная скорость бруска относительно земли равна нулю. Какой должна быть длина тележки, чтобы брусок в дальнейшем не упал с неё? Коэффициент трения между бруском и тележкой равен k.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Брусок положили неподвижным на едущую тележку, поэтому относительно тележки он скользит назад. Сила трения скольжения разгоняет брусок и тормозит тележку, пока их скорости не сравняются; после этого трение исчезает и они едут вместе. Брусок не упадёт, если за время проскальзывания он сместится относительно тележки не больше её длины. Ключевой закон — второй закон Ньютона для каждого тела (или закон сохранения импульса вместе с законом сохранения энергии — проверим вторым способом).

Обозначения. Ось x — горизонтально по движению тележки; $a_б$, $a_т$ — модули ускорений бруска и тележки относительно земли; τ — время проскальзывания; u — общая скорость после него; l — путь бруска относительно тележки.

1. Силы. На брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции $\vec{N}$ тележки и сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$. Брусок отстаёт от тележки, поэтому трение на него направлено *вперёд*, по оси x. На тележку брусок действует силой трения $\vec{F}'_{тр} = -\vec{F}_{тр}$ назад (третий закон Ньютона) и давит вниз; пол гладкий, горизонтальных сил от него нет.



Силы, пока брусок проскальзывает. Трение на брусок — вперёд, на тележку — назад. Вертикальные силы на тележку не показаны: они горизонтального движения не меняют.

2. Ускорения. Второй закон Ньютона для бруска в проекции на вертикаль: $N - mg = 0$, значит $N = mg$ и сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = kN = kmg$. Тот же закон в проекции на ось x для бруска и для тележки:

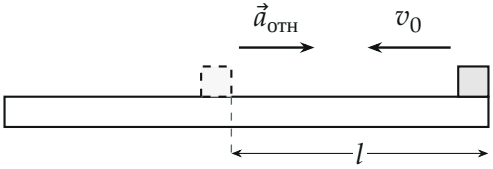
$$m\,a_{\text{б}} = kmg \quad \Rightarrow \quad a_{\text{б}} = kg, \qquad\qquad M\,a_{\text{т}} = -kmg \quad \Rightarrow \quad a_{\text{т}} = \frac{kmg}{M}.$$

Брусок разгоняется, тележка тормозит (знак минус в проекции учтён: $a_{\text{т}}$ — модуль). Формулы верны, пока есть проскальзывание.

3. Переход в систему отсчёта тележки. Удобнее всего смотреть на брусок из тележки: там его путь и есть нужное смещение. В этой системе в начальный момент брусок движется назад со скоростью v_0, а его ускорение относительно тележки — разность ускорений относительно земли, направлено вперёд:

$$a_{\text{отн}} = a_{\text{б}} + a_{\text{т}} = kg + \frac{kmg}{M} = kg\,\frac{M+m}{M}.$$

Относительное движение — равнозамедленное, от скорости v_0 до остановки (это и есть момент, когда скорости сравнялись).

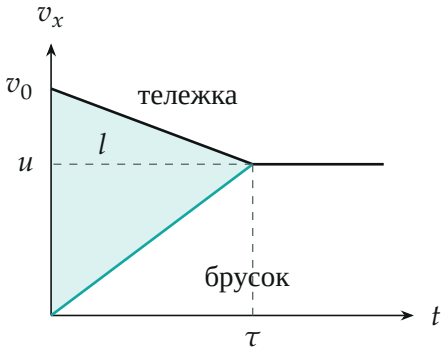


В системе отсчёта тележки брусок стартует назад со скоростью v_0, тормозится ускорением $\vec{a}_{отн}$ и останавливается (штриховой контур), пройдя путь l.

4. Смещение бруска относительно тележки. Для равнозамедленного движения от скорости v_0 до нуля путь равен $v_0^2/(2a)$:

$$l = \frac{v_0^2}{2a_{отн}} = \frac{v_0^2 M}{2kg\,(M+m)}.$$

После остановки относительно тележки трения покоя не нужно (тела едут с постоянной общей скоростью по гладкому полу), брусок дальше не смещается. Значит, тележка должна быть не короче l.



Скорости тележки и бруска относительно земли (построено для $M = 2m$). Площадь закрашенного треугольника между графиками — путь бруска относительно тележки l.

5. Второй способ: законы сохранения. Горизонтальных внешних сил на систему «брусок + тележка» нет, поэтому по закону сохранения импульса системы в проекции на x от начала до конца проскальзывания $Mv_0 = (M+m)u$, $u = \dfrac{Mv_0}{M+m}$. Работа сил трения в паре равна $-F_{тр}\,l$ (она зависит только от относительного смещения) и равна изменению кинетической энергии системы:

$$kmg\,l = \frac{Mv_0^2}{2} - \frac{(M+m)u^2}{2} = \frac{Mm\,v_0^2}{2(M+m)} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{v_0^2 M}{2kg\,(M+m)}.$$

Ответ тот же.

Обратите внимание. Нельзя считать путь бруска относительно земли: брусок тоже едет вперёд, а упадёт он, если сместится относительно *тележки*. Путь относительно земли $a_б\tau^2/2$ в ответ не входит.

Проверка. Размерность: $\dfrac{(\text{м/с})^2 \cdot \text{кг}}{\text{м/с}^2 \cdot \text{кг}} = \text{м}$. Пределы: при $M \gg m$ тележка не тормозит, $l \to v_0^2/(2kg)$ — тележка едет равномерно, и брусок просто разгоняется трением до v_0; при $M \ll m$ тележка мгновенно останавливается, $l \to 0$. Смысл: чем тяжелее тележка, тем дольше брусок отстаёт и тем длиннее она должна быть.

Ответ. $l \geq \dfrac{v_0^2 M}{2kg\,(M+m)}$.