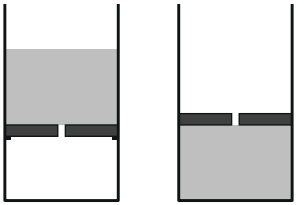
Поршень с отверстием

Задача 2. [ИОШ 2017/18, отборочный этап, 11 класс, задача 2] В цилиндрическом сосуде площадью сечения $S = 200$ см^2 закреплён поршень массой $m = 2$ кг, в котором сделано маленькое отверстие. Если на поршень налить слой воды толщиной $h = 10$ см, вода начнёт вытекать через отверстие со скоростью $v = 1$ мл/с (левый рисунок). За какое время поршень опустится на дно сосуда, если его освободить, на дно сосуда налить слой воды толщиной $h = 10$ см, а поршень положить сверху на воду (правый рисунок). Трение между поршнем и стенками сосуда отсутствует, но вода между стенками сосуда и поршнем просачиваться не может.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гидростатику и сравнение двух течений через одно и то же отверстие. Сколько воды за секунду проходит через малое отверстие, зависит только от перепада давлений по разные стороны от него (и от самого отверстия). Значит, достаточно сравнить перепады в двух опытах: если они равны, то равны и расходы. Во втором опыте перепад создаёт вес поршня, и он не меняется, пока поршень опускается, — расход постоянен, и время находится делением объёма на расход.

Обозначения. p_0 — атмосферное давление, $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, $g = 10$ м/с^2, Δp — перепад давлений на отверстии (снизу минус сверху во втором опыте, сверху минус снизу в первом), x — толщина слоя, уже перетёкшего на поршень.

1. Перепад в первом опыте. Над отверстием — слой воды h, давление $p_0 + \rho g h$; под поршнем воздух, p_0. Перепад

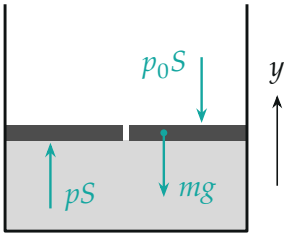
$$\Delta p_1 = \rho g h = 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 10^3 \text{ Па},$$

при нём расход $v = 1$ мл/с.

2. Перепад во втором опыте в начале. Второй закон Ньютона для поршня в проекции на вертикальную ось (поршень опускается медленно, ускорение пренебрежимо мало, трения нет): вниз — сила тяжести mg и давление атмосферы p_0S, вверх — давление воды снизу pS:

$$pS = p_0S + mg \quad \Rightarrow \quad \Delta p_2 = p - p_0 = \frac{mg}{S} = \frac{2 \cdot 10}{0{,}02} = 10^3 \text{ Па}.$$

Перепад тот же, что в первом опыте, поэтому вода в первый момент течёт вверх через отверстие с тем же расходом v.



Силы, действующие на поршень во втором опыте (в самом начале, воды над ним нет). Отверстие — щель в середине поршня.

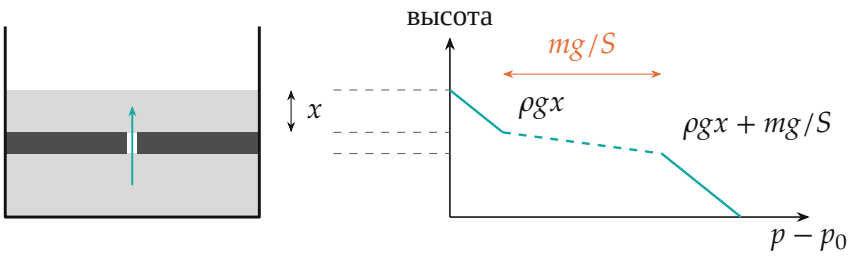
3. Перепад во втором опыте не меняется. Пусть на поршень уже перетёк слой толщиной x. Теперь сверху на поршень давит ещё и этот слой: $p_{\text{верх}} = p_0 + \rho g x$. Условие равновесия поршня (как в п. 2):

$$p_{\text{низ}}S = p_{\text{верх}}S + mg \quad \Rightarrow \quad p_{\text{низ}} = p_0 + \rho g x + \frac{mg}{S}.$$

Перепад на отверстии — между водой под поршнем и водой над ним у самого отверстия:

$$\Delta p = p_{\text{низ}} - p_{\text{верх}} = \frac{mg}{S} = 10^3 \text{ Па}$$

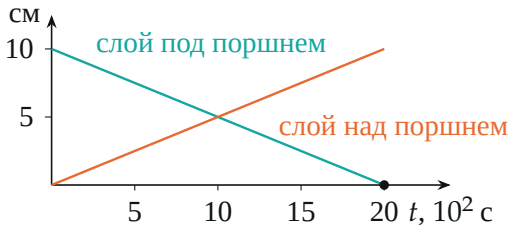
— не зависит от x. Давление столба над поршнем прибавляется к обеим сторонам отверстия и в разности сокращается. Расход всё время равен v.



Промежуточный момент: на поршне слой x. Справа — избыточное давление по высоте: над отверстием ρgx, под ним $\rho gx + mg/S$; скачок на поршне mg/S один и тот же при любом x.

4. Время. Поршень дойдёт до дна, когда вся вода из-под него, объём $V = hS$, перетечёт наверх:

$$t = \frac{V}{v} = \frac{hS}{v} = \frac{10\text{ см} \cdot 200\text{ см}^2}{1\text{ см}^3/\text{с}} = 2 \cdot 10^3\text{ с} \approx 33\text{ мин}.$$



Толщина слоя под поршнем (= высота поршня над дном) и над ним во втором опыте: обе меняются равномерно, 1 мл/с = 0,005 см/с; поршень на дне через 2000 с.

Обратите внимание. В первом опыте расход 1 мл/с — только начальный: слой над поршнем убывает, перепад ρgh падает, и течение замедляется. Во втором опыте замедления нет — в этом вся разница. Отвечать «hS/v» можно только после доказательства п. 3.

Проверка. Размерность: $\frac{\text{м} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^3/\text{с}} = \text{с}$. Числа: $mg/S = 20/0{,}02 = 1000$ Па и $\rho gh = 1000$ Па совпали — задача так и задумана. Энергия:

вода в конце лежит слоем той же толщины h (теперь на поршне, стоящем на дне), её центр масс на прежней высоте; поршень опустился на h и потерял $mgh = 2$ Дж — они рассеиваются трением воды в отверстии. Медленное течение с постоянным расходом этому не противоречит.

Ответ. $t = \dfrac{hS}{v} = 2 \cdot 10^3$ с (около 33 минут).