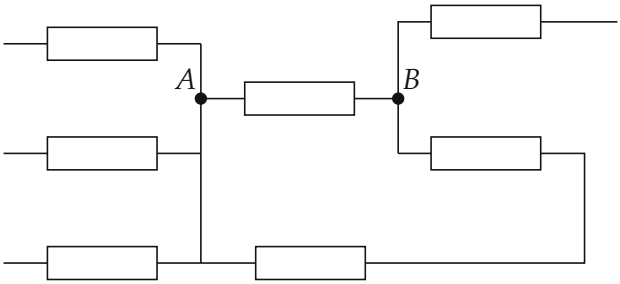
Измерение сопротивления внутри цепи

Задача 3. [ИОШ 2017/18, отборочный этап, 11 класс, задача 3] Имеется электрическая цепь, состоящая из большого количества пассивных элементов (т. е. не вносящих в цепь энергию; на рисунке показана часть этой цепи). Как, имея амперметр, вольтметр, источник и провода, измерить сопротивление одного из резисторов, не удаляя его из цепи (например, резистора AB)? Разрешается: подключаться к любым точкам цепи. Не разрешается: удалять элементы из данной цепи, разрывать соединения или провода данной цепи. Опишите последовательность действий и дайте их обоснование. Считать, что сопротивления амперметра, источника и данных соединительных проводов очень малы, сопротивление вольтметра очень велико.



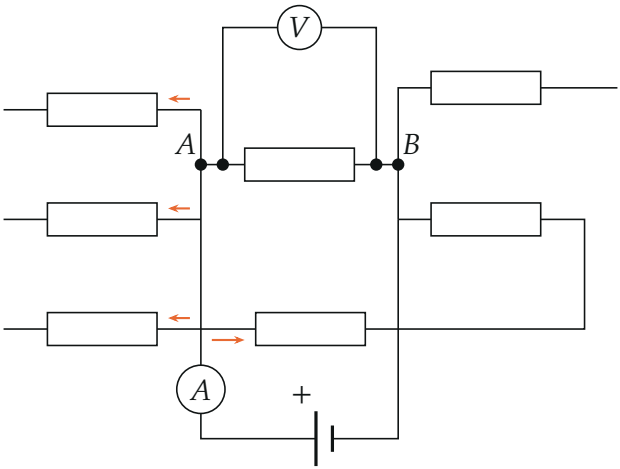
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Ома для участка цепи и на то, когда ток в ветви равен нулю. Сопротивление резистора — это отношение напряжения на нём к току через него, $R_{AB} = U_{AB}/I_{AB}$. Напряжение измерить легко: вольтметр подключается к точкам A и B снаружи. Трудность — в токе: амперметр нельзя врезать в провод цепи, а ток в подводящем проводе к узлу A растекается по всем ветвям, а не только через AB. Идея — выровнять потенциалы всех соседей узла A с потенциалом самого A: ток через резистор течёт, только если на его концах разные потенциалы.

Обозначения. C, D, E — дальние концы трёх резисторов, сходящихся в узле A слева; F — дальний конец нижнего резистора, идущего от узла A (рисунок к п. 2). φ_X — потенциал точки X, φ_+ — потенциал плюса источника.

1. Почему простое подключение не годится. Подключим источник к точкам A и B через амперметр, вольтметр — параллельно AB. Вольтметр покажет U_{AB} (его ток пренебрежимо мал). Но ток I через амперметр в узле A делится: часть идёт через AB, часть — через три левых резистора и нижний резистор и по остальной цепи тоже приходит к B. Первый закон Кирхгофа для узла A:

$$I = I_{AB} + I_{AC} + I_{AD} + I_{AE} + I_{AF},$$

и U_{AB}/I — это сопротивление всей цепи между A и B, а не одного резистора.

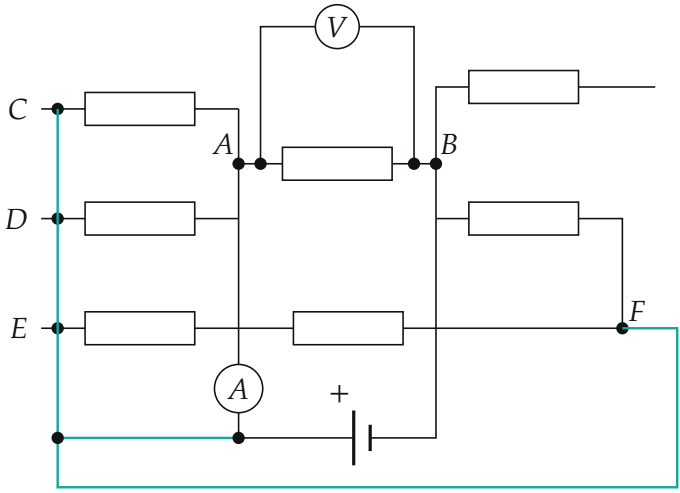


Неверная схема: ток амперметра в узле A растекается (морковные стрелки) по всем резисторам, сходящимся в A.

2. Как запретить ток в соседние ветви. Ток через резистор между A и C по закону Ома равен $I_{AC} = (\varphi_A - \varphi_C)/R_{AC}$. Он равен нулю, если $\varphi_C = \varphi_A$. Соединим проводами плюс источника (до амперметра!) с точками C, D, E и F, а сам плюс через амперметр — с узлом A. Сопротивление амперметра и проводов очень мало, поэтому

$$\varphi_A = \varphi_C = \varphi_D = \varphi_E = \varphi_F = \varphi_+,$$

и токи I_{AC}, I_{AD}, I_{AE}, I_{AF} равны нулю. Минус источника подключаем к B, вольтметр — к A и B.

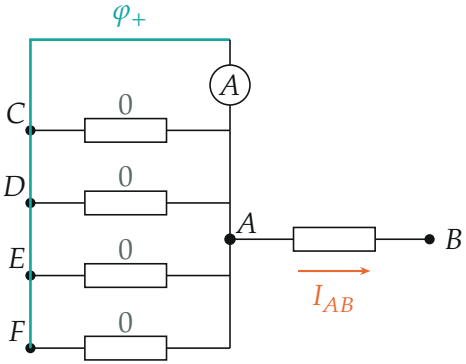


Верная схема: плюс источника соединён (бирюзовые провода) с точками C, D, E, F до амперметра; через амперметр он подходит только к узлу A.

3. Что покажут приборы. Узел A теперь связан с остальной цепью только двумя путями: через амперметр (к плюсу) и через резистор AB; остальные ветви тока не несут. Первый закон Кирхгофа для узла A: $I_{\text{амп}} = I_{AB}$. Вольтметр показывает U_{AB}. По закону Ома

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I_{\text{амп}}}.$$

Ток через сам источник при этом больше I_{AB}: часть его уходит через C, D, E, F в остальную цепь и возвращается к B другими путями. На измерение это не влияет — эти токи идут мимо амперметра.



Узел A и его соседи в верной схеме (остальная цепь не показана): концы C, D, E, F и сам узел A под одним потенциалом φ_+, токи в этих четырёх резисторах равны нулю (серые нули), весь ток амперметра идёт через AB.

Обратите внимание. Провода к C, D, E, F нужно подключать к плюсу *до* амперметра. Если подключить их после, к узлу A, амперметр снова измерит сумму токов всех ветвей. Второе: выравнивают потенциалы соседей именно узла A — того конца резистора, со стороны которого стоит амперметр; соседей B трогать не нужно.

Проверка. Предельный случай: если бы у узла A не было других ветвей, кроме AB, схема п. 2 совпала бы со схемой п. 1, и U/I дало бы R_{AB} — верно. Размерность: $[U/I] = \text{В}/\text{А} = \text{Ом}$. Условия задачи не нарушены: ни один провод цепи не разорван, приборы подключены только к узлам.

Ответ. Минус источника подключить к B, плюс — через амперметр к A и, кроме того, проводами (минуя амперметр) ко всем узлам C, D, E, F, которые соединены с A через один резистор; вольтметр подключить к A и B. Тогда ток в ветвях AC, AD, AE, AF равен нулю, амперметр показывает ток через AB, и $R_{AB} = U_{AB}/I_{AB}$.