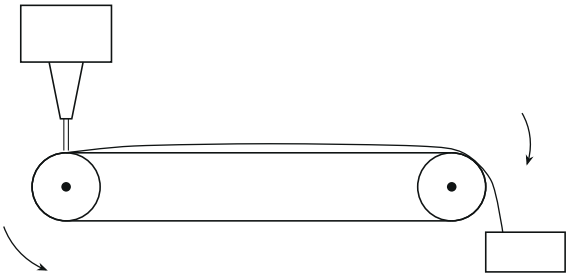
Песок на ленте транспортёра

Задача 4. [ИОШ 2017/18, отборочный этап, 11 класс, задача 4] Горизонтальная лента транспортёра, движущаяся со скоростью $v = 1$ м/с, перемещает песок от бункера до пескоприёмника. Скорость выхода песка из бункера (расход песка) составляет $\mu = 20$ кг/с. Оцените, какую мощность должен развивать для этого мотор двигателя транспортёра, считая, что мощность, необходимая для перемещения самого транспортёра, мала.

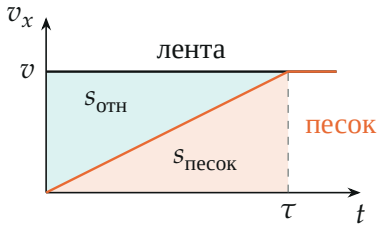


▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на работу и энергию при переменной массе. Песок падает на ленту без горизонтальной скорости, и лента разгоняет каждую песчинку до своей скорости v силой трения. Мотор тратит энергию на две вещи сразу: кинетическую энергию песка и теплоту трения при проскальзывании песчинки по ленте, пока скорости не сравнялись. Покажем, что эти части равны, — и мощность мотора вдвое больше, чем «скорость прироста кинетической энергии».

Обозначения. Δm — масса песка, упавшая на ленту за малое время Δt ($\Delta m = \mu\,\Delta t$), f — сила трения между лентой и этой порцией, τ — время её разгона, P — мощность мотора. Ось x — вдоль движения ленты, в системе отсчёта Земли.

1. Разгон одной порции. Второй закон Ньютона для порции песка в проекции на ось x: $\Delta m\, a = f$. Сила трения скольжения постоянна, поэтому разгон равноускоренный: скорость растёт от 0 до v за время $\tau = v/a$. Перемещения за время разгона:

$$s_{\text{песок}} = \frac{v\tau}{2}, \qquad s_{\text{лента}} = v\tau = 2s_{\text{песок}}.$$



Скорости ленты и порции песка: площадь под морковной прямой — путь песка $v\tau/2$, под чёрной — путь ленты $v\tau$; бирюзовый треугольник — проскальзывание $s_{отн} = v\tau/2$.

2. Работа мотора на одну порцию. Сила трения со стороны песка на ленту по третьему закону Ньютона равна f и направлена против движения; чтобы лента шла равномерно, мотор прикладывает к ней силу f и совершает работу на пути ленты:

$$A = f\, s_{\text{лента}} = \Delta m\, a \cdot v\tau = \Delta m\, v^2.$$

Из неё кинетическая энергия порции (теорема о кинетической энергии: работа силы трения на пути песка)

$$E_{\text{к}} = f\, s_{\text{песок}} = \frac{\Delta m\, v^2}{2},$$

остальное — теплота трения на относительном пути: $Q = f\,(s_{\text{лента}} - s_{\text{песок}}) = \dfrac{\Delta m\, v^2}{2}$. Ровно пополам, при любой силе трения.

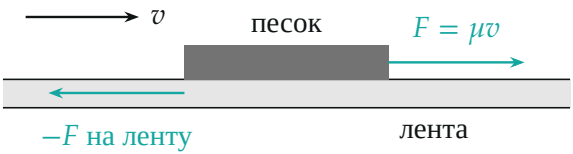
$A = \Delta m\, v^2$	
$E_{\text{к}} = \frac{1}{2}\Delta m v^2$	$Q = \frac{1}{2}\Delta m v^2$

Куда уходит работа мотора на одну порцию песка: половина — в кинетическую энергию, половина — в тепло.

3. Мощность. Делим на Δt, учитывая $\Delta m = \mu\, \Delta t$:

$$P = \frac{A}{\Delta t} = \mu v^2 = 20 \cdot 1^2 = 20 \text{ Вт}.$$

Второй способ — через импульс. За Δt лента сообщает песку горизонтальный импульс $\Delta m\, v$. По второму закону Ньютона в импульсной форме средняя сила, с которой лента тянет песок, $F = \Delta m\, v/\Delta t = \mu v$. Столько же мотор прикладывает к ленте, движущейся со скоростью v, и его мощность $P = Fv = \mu v^2$ — то же.



Песок на ленте: лента тянет песок силой $F = \mu v$ (по ходу), песок — ленту силой $-F$, которую уравновешивает мотор.

Обратите внимание. Ответ $\mu v^2/2$ (только кинетическая энергия) — типичная ошибка: проскальзывание песка по ленте неизбежно, иначе лента не смогла бы его разогнать, и тепло выделяется всегда. Реальный мотор тратит больше — на трение в роликах, которое по условию не учитываем; поэтому ответ — оценка снизу.

Проверка. Размерность: кг/с $\cdot$ м^2/с^2 = Дж/с = Вт. Два независимых способа (энергия с теплом и импульс) дали одно и то же μv^2. Предел: $v \to 0$ — лента почти не разгоняет песок, $P \to 0$.

Ответ. $P = \mu v^2 = 20$ Вт (половина — кинетическая энергия песка, половина — тепло трения песка о ленту).