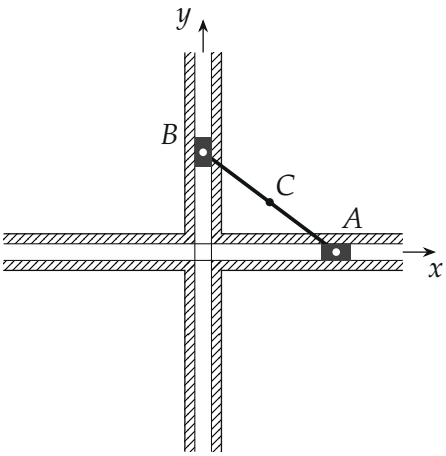
Линейка эллипсографа

Задача 5. [ИОШ 2017/18, отборочный этап, 11 класс, задача 5] Плоский механизм, который называется линейкой эллипсографа, состоит из двух точечных «ползунов» A и B (деталей, способных перемещаться вдоль направляющих), связанных стержнем длиной l, шарнирно прикреплённым к ползунам (см. рисунок; ползуны обозначены тёмными прямоугольниками). Пусть ползуны движутся по закону $x_A(t) = l\cos\omega t$, $y_A(t) = 0$, $x_B(t) = 0$, $y_B(t) = l\sin\omega t$. По какой траектории движется точка C, являющаяся серединой отрезка AB? Найти ускорение точки C в тот момент, когда стержень AB наклонён к оси x под углом $60°$. Ответ обосновать.



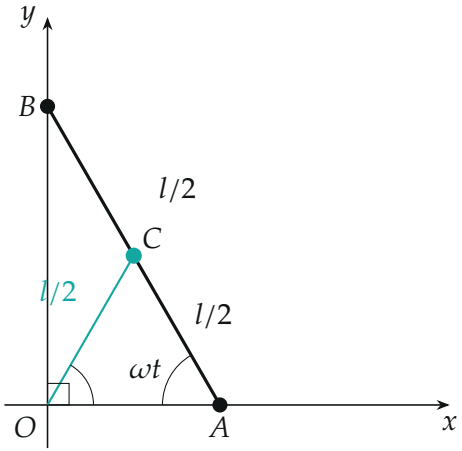
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на кинематику точки, заданной координатами. Ползуны всё время на осях, стержень между ними — гипотенуза прямоугольного треугольника OAB (O — начало координат). Середина гипотенузы равноудалена от всех трёх вершин, поэтому точка C всё время на расстоянии $l/2$ от O — движется по окружности. Остаётся понять, равномерно ли, и найти ускорение.

Обозначения. O — начало координат (точка пересечения направляющих), φ — угол наклона стержня к оси x, $\vec{a}$ — ускорение точки C.

1. Закон движения точки C**.** Координаты середины отрезка — полусуммы координат концов:

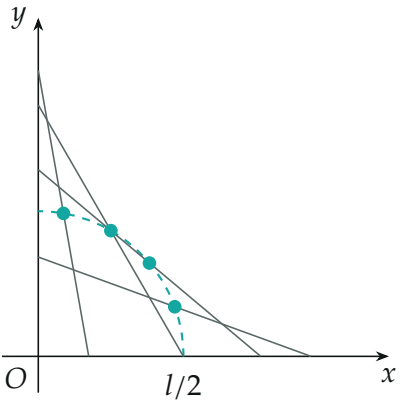
$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{l}{2}\cos\omega t, \qquad y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{l}{2}\sin\omega t.$$

Отсюда $x_C^2 + y_C^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$: траектория — окружность радиуса $l/2$ с центром O, а радиус-вектор OC поворачивается на угол ωt, равномерно, с угловой скоростью ω.



Треугольник OAB прямоугольный; середина гипотенузы C отстоит от O, A, B на $l/2$. Треугольник OAC равнобедренный, поэтому $\angle AOC = \angle OAC = \omega t$.

2. Геометрический смысл. $\operatorname{tg}\angle OAB = \frac{y_B}{x_A} = \operatorname{tg}\omega t$, т. е. стержень наклонён к оси x под углом $\varphi = \omega t$. Треугольник OAC равнобедренный ($OC = AC = l/2$), значит $\angle AOC = \angle OAC = \omega t$: отрезок OC наклонён к оси x под тем же углом, что и стержень, только в другую сторону. Это то же, что дал п. 1.

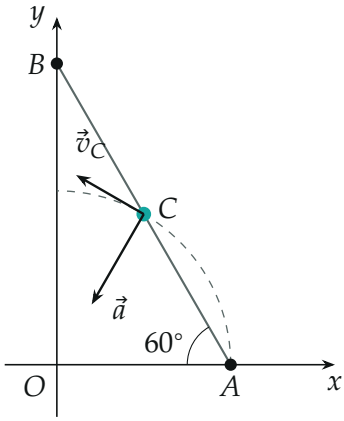


Положения стержня при $\omega t = 20°, 40°, 60°, 80°$ (вычислены по закону из условия): середины (бирюзовые точки) лежат на окружности радиуса $l/2$.

3. Ускорение. Точка C движется по окружности радиуса $l/2$ равномерно, с постоянной угловой скоростью ω; её ускорение — центростремительное, направлено к центру O:

$$a = \omega^2 \frac{l}{2}.$$

То же даёт дифференцирование: $\ddot{x}_C = -\omega^2 x_C$, $\ddot{y}_C = -\omega^2 y_C$, т. е. $\vec{a} = -\omega^2 \overrightarrow{OC}$. Ускорение не зависит от момента времени, и при $\varphi = 60°$ оно такое же: $a = \omega^2 l/2$, направлено от C к O — под углом $60°$ к оси x (вниз-влево).



Скорость $v_C = \omega l/2$ — по касательной к окружности, ускорение $a = \omega^2 l/2$ — к центру O.

Обратите внимание. Угол наклона стержня к оси x равен ωt — это видно из $\operatorname{tg}\varphi = y_B/x_A$, а не задано напрямую. И хотя сами ползуны движутся неравномерно (их скорости и ускорения меняются), середина стержня движется равномерно по окружности.

Проверка. Размерность: $[\omega^2 l] = \text{с}^{-2} \cdot \text{м} = \text{м/с}^2$. Частные случаи: при $\omega t = 0$ точка C в $(l/2, 0)$, ускорение $\ddot{x}_C = -\omega^2 l/2$ — к центру, то же значение. Скорость $v_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2} = \omega l/2$ постоянна, и $a = v_C^2/(l/2) = \omega^2 l/2$ — второй способ сходится.

Ответ. Окружность радиуса $l/2$ с центром в точке пересечения направляющих; точка C движется по ней равномерно с угловой скоростью ω. Ускорение $a = \dfrac{\omega^2 l}{2}$, направлено к центру; от угла наклона стержня не зависит (и при 60° такое же).