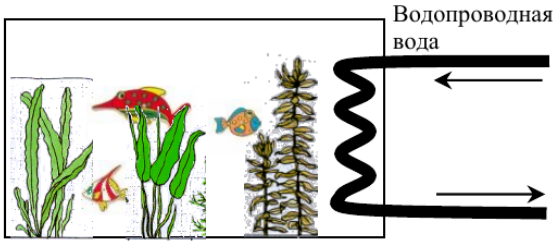
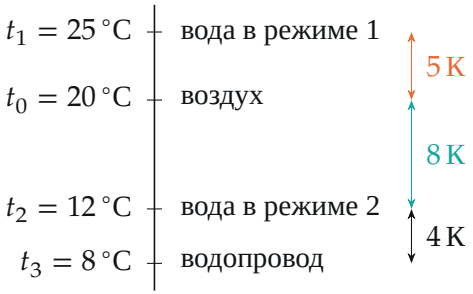
Охлаждение аквариума водопроводной водой

Задача 6. [ИОШ 2017/18, отборочный этап, 11 класс, задача 6] В зоопарке аквариум для содержания теплолюбивых рыб ($t_1 = 25\,^\circ\text{C}$) переделывают для содержания холодоустойчивых ($t_2 = 12\,^\circ\text{C}$). Для этого из аквариума убирают нагреватель, а монтируют в нём систему охлаждения, которая представляет трубку с протекающей по ней водопроводной водой. Какой расход водопроводной воды с температурой $t_3 = 8\,^\circ\text{C}$ нужно обеспечить в трубке (масса воды в секунду), чтобы добиться заданной температуры воды в аквариуме? Считать, что эффективность системы охлаждения такова, что водопроводная вода вытекает из неё, имея температуру воды в аквариуме. Известно, что при содержании теплолюбивых рыб использовался нагреватель мощностью $P = 75$ Вт, а температура воздуха в помещении фиксирована и равна $t_0 = 20\,^\circ\text{C}$. Удельная теплоёмкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на стационарный тепловой баланс. Температура воды в аквариуме не меняется, значит, за каждую секунду тепла приходит столько же, сколько уходит. Теплообмен с воздухом комнаты идёт через стенки и поверхность, и его мощность пропорциональна разности температур воды и воздуха (закон теплопередачи Ньютона — Рихмана) с коэффициентом, зависящим только от аквариума. Этот коэффициент неизвестен, но его можно найти из первого режима (с нагревателем) и подставить во второй (с охлаждением).

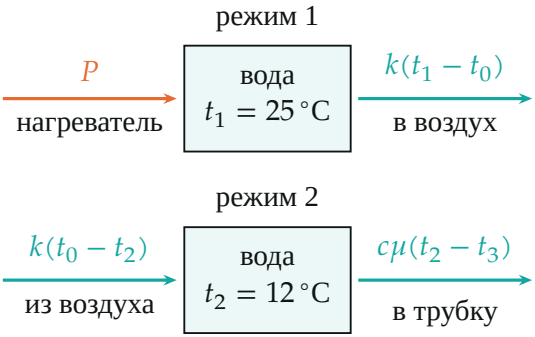
Обозначения. k — коэффициент теплопередачи аквариума, Вт/К (мощность теплообмена с воздухом $k|t - t_0|$), μ — искомый расход водопроводной воды, кг/с.



Шкала температур задачи и три разности, которые войдут в ответ.

1. Режим с нагревателем. Уравнение теплового баланса для воды аквариума в стационарном режиме: вся мощность нагревателя уходит в воздух (вода теплее воздуха, $t_1 > t_0$):

$$P = k\,(t_1 - t_0) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{P}{t_1 - t_0} = \frac{75}{5} = 15\ \text{Вт/К}.$$



Потоки тепла в двух стационарных режимах: что приходит в воду аквариума за секунду, то и уходит.

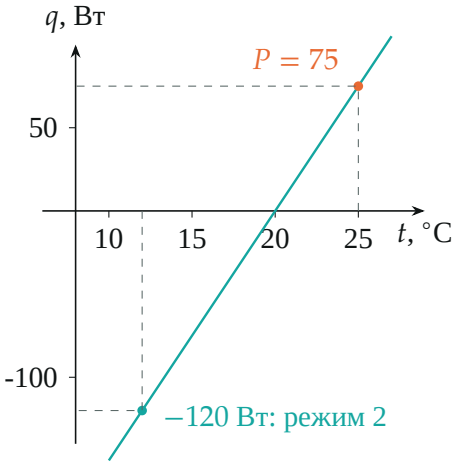
2. Режим с охлаждением. Теперь вода холоднее воздуха, и тепло идёт из комнаты в аквариум с мощностью $k(t_0 - t_2)$ — коэффициент тот же, ведь аквариум и его стенки не менялись. Уносит это тепло водопроводная вода: каждую секунду масса μ входит в трубку при t_3 и выходит при t_2, забирая $c\mu(t_2 - t_3)$. Уравнение теплового баланса для воды аквариума:

$$c\mu\,(t_2 - t_3) = k\,(t_0 - t_2).$$

3. Ответ. Подставляем k из п. 1:

$$\mu = \frac{k\,(t_0 - t_2)}{c\,(t_2 - t_3)} = \frac{P\,(t_0 - t_2)}{c\,(t_1 - t_0)(t_2 - t_3)},$$

$$\mu = \frac{75 \cdot 8}{4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 4} \approx 7{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{кг/с} = 7{,}1\ \text{г/с}.$$



Мощность, которую аквариум отдаёт воздуху, $q = k(t - t_0)$ при $k = 15$ Вт/К: прямая через t_0. Режим 1 — +75 Вт (их даёт нагреватель), режим 2 — −120 Вт (их уносит водопроводная вода).

Обратите внимание. Охлаждающей воде надо унести не 75 Вт (мощность бывшего нагревателя), а $k(t_0 - t_2) = 15 \cdot 8 = 120$ Вт: новый режим — ниже температуры комнаты, и поток тепла через стенки сменил направление и величину. Второе: вода выходит из трубки с температурой аквариума t_2, поэтому нагревается ровно на $t_2 - t_3 = 4$ К.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Вт} \cdot \text{К}}{\text{Дж/(кг·К)} \cdot \text{К} \cdot \text{К}} = \text{кг/с}$. Второй способ счёта: тепло 120 Вт, каждый килограмм воды уносит $4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 4 = 16{,}8$ кДж, $\mu = 120/16\,800 \approx 7{,}1$ г/с — то же. Предел: $t_3 \to t_2$ — вода почти не нагревается, $\mu \to \infty$; $t_2 \to t_0$ — приток тепла исчезает, $\mu \to 0$.

Ответ. $\mu = \dfrac{P\,(t_0 - t_2)}{c\,(t_1 - t_0)(t_2 - t_3)} \approx 7{,}1$ г/с.