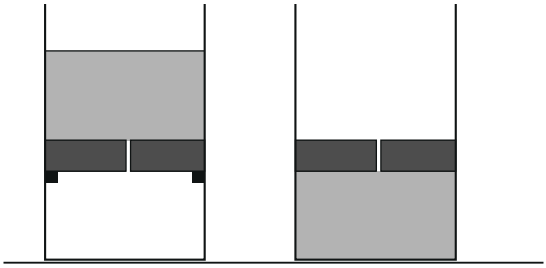
Поршень с отверстием

Задача 3. [ИОШ 2017/18, отборочный этап, 9 класс, задача 3] В цилиндрическом сосуде площадью сечения $S = 200$ см^2 закреплён поршень массой $m = 2$ кг, в котором сделано маленькое отверстие. Если на поршень налить слой воды толщиной $h = 10$ см, вода начнёт вытекать через отверстие со скоростью $v = 1$ мл/с (левый рисунок). За какое время поршень опустится на дно сосуда, если его освободить, на дно сосуда налить слой воды толщиной $h = 10$ см, а поршень положить сверху на воду (правый рисунок). Трение между поршнем и стенками сосуда отсутствует, но вода между стенками сосуда и поршнем просачиваться не может.



▲ **Решение. Что происходит.** Сколько воды за секунду проходит через маленькое отверстие, зависит только от разности давлений по обе стороны от него (и от самого отверстия, а оно одно и то же). В первом опыте эту разность создаёт слой воды над поршнем, во втором — вес поршня, лежащего на воде. Если разности окажутся равными, расход тоже будет одинаковым. Главное — понять, что во втором опыте разность давлений не меняется, пока вода перетекает наверх: поэтому поршень опускается равномерно. Задача на гидростатическое давление и условие равновесия поршня.

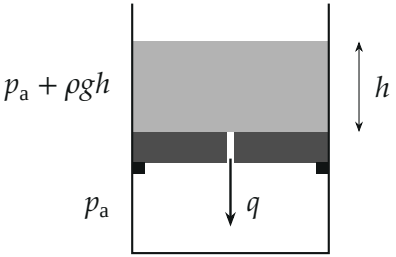
Обозначения. ρ — плотность воды, p_a — атмосферное давление, Δp — разность давлений под отверстием и над ним, $q = 1$ мл/с — расход воды (в условии обозначен v), x — толщина слоя воды, уже перетёкшей на поршень, τ — искомое время.

1. Первый опыт: разность давлений на отверстии. Над отверстием давление на дне слоя воды $p_\text{a} + \rho g h$, под поршнем воздух с давлением

p_a. Разность

$$\Delta p_1 = \rho g h = 10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}1 \text{ Па} = 10^3 \text{ Па}.$$

При ней расход $q = 1$ мл/с (в начале вытекания; дальше слой тоньше, но нам нужна только эта пара «разность давлений — расход»).

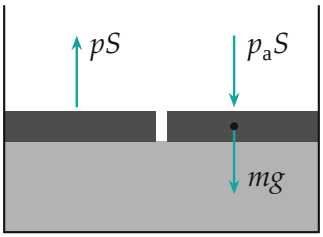


Первый опыт: над отверстием давление больше на $\rho g h$; через отверстие вниз вытекает $q = 1$ мл/с.

2. Второй опыт: давление под поршнем. Поршень лежит на воде и опускается медленно, его ускорение пренебрежимо мало. Второй закон Ньютона для поршня в проекции на вертикальную ось (сначала, пока воды над ним нет): сверху давит атмосфера $p_a S$, вниз тянет mg, снизу вода давит $p\,S$:

$$pS = p_a S + mg \quad \Rightarrow \quad \Delta p_2 = p - p_a = \frac{mg}{S} = \frac{2 \cdot 10}{0{,}02} \text{ Па} = 10^3 \text{ Па}.$$

Это та же разность, что и в первом опыте, значит, и расход в начале тот же, $q = 1$ мл/с; вода течёт *вверх*, на поршень.



Второй опыт: силы, действующие на поршень. Давление воды под ним больше атмосферного на mg/S.

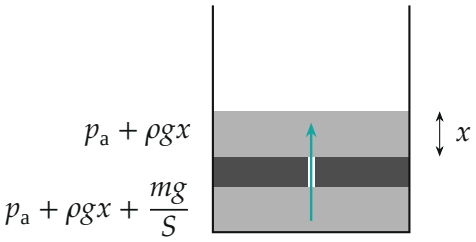
3. Почему разность давлений не меняется. Пусть на поршень уже перетёк слой толщиной x. Теперь сверху на поршень давит ещё и этот слой: давление на верхней грани поршня $p_\text{a} + \rho g x$. Условие равновесия поршня:

$$p\,S = (p_\text{a} + \rho g x)\,S + mg \quad \Rightarrow \quad p = p_\text{a} + \rho g x + \frac{mg}{S}.$$

Над отверстием давление $p_\text{a} + \rho g x$, под ним p, разность

$$\Delta p = p - (p_\text{a} + \rho g x) = \frac{mg}{S} = \text{const}.$$

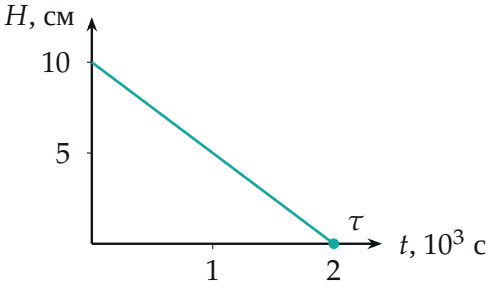
Перетёкшая вода прибавила одинаковое давление $\rho g x$ и над отверстием, и под поршнем, поэтому разность осталась прежней. Значит, весь процесс идёт с постоянным расходом q.



Промежуточный момент: на поршне слой x перетёкшей воды. Давления над и под отверстием выросли на одно и то же $\rho g x$.

4. Время опускания. Поршень достигнет дна, когда вся вода из-под него, объём $V = hS$, перетечёт наверх. При постоянном расходе

$$\tau = \frac{hS}{q} = \frac{0{,}1\ \text{м} \cdot 0{,}02\ \text{м}^2}{10^{-6}\ \text{м}^3/\text{с}} = 2 \cdot 10^3\ \text{с} \approx 33\ \text{мин}.$$



Высота H нижней грани поршня над дном убывает с постоянной скоростью $q/S = 0{,}05$ мм/с и обращается в ноль при $\tau = 2 \cdot 10^3$ с.

Обратите внимание: в первом опыте слой над поршнем мелеет и расход падает, а во втором расход постоянен: «подпор» из перетёкшей воды действует с обеих сторон отверстия одинаково. Поэтому время — просто объём, делённый на начальный расход.

Проверка. Размерность: $\text{м} \cdot \text{м}^2/(\text{м}^3/\text{с}) = \text{с}$. Предельный случай: при более тяжёлом поршне $mg/S > \rho gh$ разность давлений и расход были бы больше, время меньше — по смыслу верно. Совпадение $\rho gh = mg/S$ не случайно: масса слоя воды над поршнем в первом опыте $\rho hS = 2$ кг — ровно масса поршня.

Смысл: поршень вытесняет воду через отверстие так же, как её выдавливал бы слой воды той же массы.

Ответ. $\tau = \dfrac{hS}{v} = 2 \cdot 10^3$ с (около 33 мин), так как $\dfrac{mg}{S} = \rho gh$ и разность давлений на отверстии во втором опыте всё время равна mg/S.