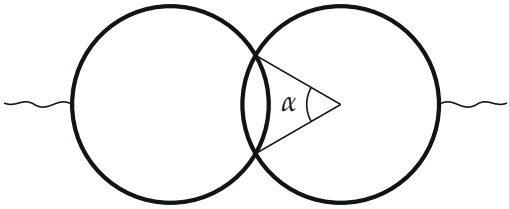
Два пересекающихся проволочных кольца

Задача 4. [ИОШ 2017/18, отборочный этап, 9 класс, задача 4] Два кольца радиуса R изготовлены из одной и той же проволоки. Сопротивление проволоки, из которой изготовлено каждое кольцо, равно r. Кольца накладывают друг на друга так, что точки их касания опираются на сектор с углом раствора $\alpha = \pi/3$. В точках контакта колец обеспечен хороший электрический контакт между ними. Кольца включают в электрическую цепь точками, наиболее удалёнными от области пересечения (см. рисунок). Найти сопротивление колец.

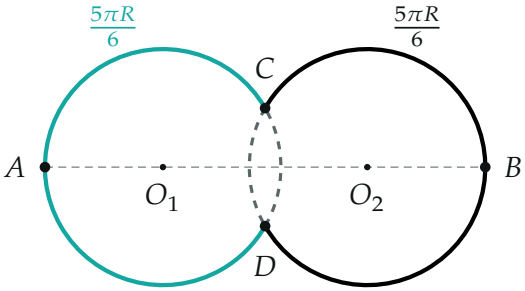


▲ **Решение. Что происходит.** Цепь из двух колец симметрична относительно прямой AB, проходящей через точки подключения. Точки контакта C и D расположены симметрично относительно этой прямой, поэтому их потенциалы равны, и по дугам между C и D ток не течёт — эти дуги можно убрать. Остаются две одинаковые параллельные ветви $A \to C \to B$ и $A \to D \to B$, каждая из двух одинаковых дуг. Задача на симметрию электрической цепи и последовательное и параллельное соединение.

Обозначения. O_1, O_2 — центры колец, A и B — точки подключения, C и D — точки контакта колец, r_x — сопротивление дуги AC (а также AD, CB, DB), R_{AB} — искомое сопротивление.

1. Длины дуг. Угол $\alpha = \pi/3$ при центре O_2 опирается на дугу CD второго кольца, лежащую внутри первого; её длина $\alpha R = \pi R/3$. По симметрии такая же дуга CD у первого кольца. Остаток кольца $2\pi R - \pi R/3 = 5\pi R/3$ точка подключения делит пополам (она наиболее удалена от области пересечения, то есть лежит на линии центров):

$$\ell_{AC} = \ell_{AD} = \ell_{CB} = \ell_{DB} = \frac{5\pi R}{6}.$$

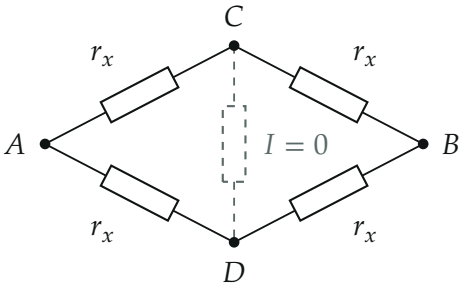


Точки подключения A, B и контакта C, D. Дуги CD (пунктир) обоих колец — по $\pi R/3$, остальные четыре дуги — по $5\pi R/6$.

2. Сопротивления дуг. Проволока однородна, поэтому сопротивление пропорционально длине: вся длина кольца $2\pi R$ имеет сопротивление r, значит,

$$\frac{r_x}{r} = \frac{5\pi R/6}{2\pi R} \quad \Rightarrow \quad r_x = \frac{5r}{12}, \qquad r_{CD} = \frac{\pi R/3}{2\pi R}\, r = \frac{r}{6}.$$

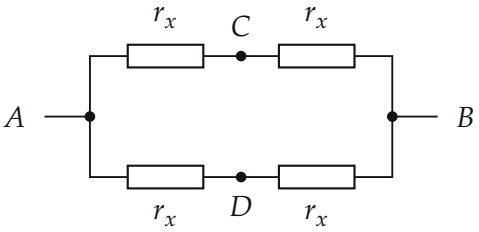
3. Эквивалентная схема и симметрия. Узлы цепи: A, B, C, D. Между A и C, A и D, C и B, D и B — по r_x; между C и D — две дуги по $r/6$, соединённые параллельно. Это мост. При зеркальном отражении относительно прямой AB цепь переходит сама в себя, а C переходит в D; распределение потенциалов при этом не меняется, поэтому $\varphi_C = \varphi_D$, и ток по дугам CD равен нулю. Их можно выбросить, не меняя токов в остальной цепи.



Эквивалентная схема — мост. Из-за симметрии $\varphi_C = \varphi_D$, и ток через перемычку CD (две дуги $r/6$ параллельно) не течёт.

4. Сопротивление цепи. Без перемычки CD остаются две параллельные ветви, в каждой два сопротивления r_x последовательно:

$$R_{AB} = \frac{2r_x \cdot 2r_x}{2r_x + 2r_x} = r_x = \frac{5r}{12}.$$



После удаления перемычки: две одинаковые ветви по $2r_x$ параллельно, $R_{AB} = r_x$.

Обратите внимание: дуги CD не «закорачивают» цепь и не уменьшают сопротивление — по ним просто не идёт ток. Но выбрасывать их можно только из-за симметрии: при подключении в несимметричных точках ток по ним пошёл бы.

Проверка. Размерность: сопротивление. Сумма дуг одного кольца: $\frac{5}{12}r + \frac{5}{12}r + \frac{1}{6}r = r$ — верно. Предел: если бы кольца касались в одной точке ($\alpha \to 0$), дуги AC и CB были бы по половине кольца, $r_x = r/2$, обе ветви сливаются в последовательное соединение двух колец, у каждого две половины параллельно: $r/4 + r/4 = r/2$; формула $r_x = \frac{2\pi - \alpha}{4\pi} r$ при $\alpha \to 0$ тоже даёт $r/2$.

Смысл: сопротивление двух колец оказалось равным сопротивлению одной дуги AC — вдвое длиннее путь, но вдвое больше параллельных путей.

Ответ. $R_{AB} = \dfrac{2\pi - \alpha}{4\pi} r = \dfrac{5r}{12}.$