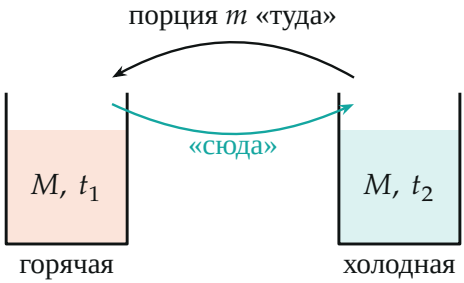
Переливания горячей и холодной воды

Задача 5. [ИОШ 2017/18, отборочный этап, 9 класс, задача 5] Имеется два сосуда, содержащих одинаковые массы горячей и холодной воды ($t_1 = 50\,^\circ\text{C}$ и $t_2 = 10\,^\circ\text{C}$). Порцию холодной воды перелили в сосуд с горячей водой и перемешали. Температура горячей воды уменьшилась на $\Delta t = 10\,^\circ\text{C}$. После этого такую же порцию горячей воды перелили в сосуд с холодной и перемешали. Затем эту процедуру повторяют. Сколько таких парных переливаний таких же порций воды («туда-сюда») нужно сделать, чтобы разность температур воды в сосудах была меньше $1\,^\circ\text{C}$? Теплопотерями пренебречь.



Поясняющий рисунок: порция m холодной воды переливается в горячую, затем такая же порция — обратно.

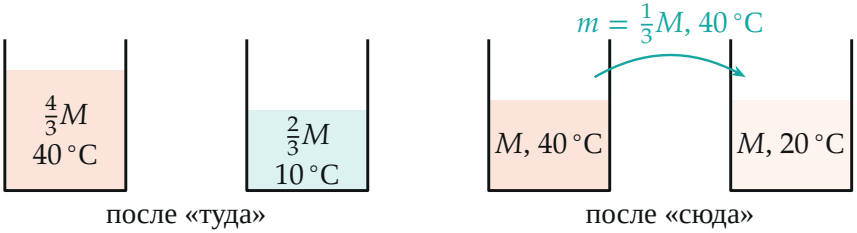
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на уравнение теплового баланса, применённое много раз подряд. Каждое переливание смешивает две порции воды; смесь получает температуру, средневзвешенную по массам. Из первого переливания мы узнаем, какую долю массы сосуда составляет порция, а потом увидим, что за одну пару «туда-сюда» разность температур уменьшается в одно и то же число раз — геометрическая прогрессия.

Обозначения. M — масса воды в каждом сосуде вначале, m — масса переливаемой порции, c — удельная теплоёмкость воды, $D = t_{\text{гор}} - t_{\text{хол}}$ — разность температур в сосудах, $D_0 = t_1 - t_2 = 40\,^\circ\text{C}$, D_n — разность после n пар переливаний.

1. Первое переливание: находим порцию. Уравнение теплового баланса для смеси M горячей и m холодной воды (теплопотерь нет, всё отданное горячей водой получает холодная): горячая остывает до $t_1' = t_1 - \Delta t$, порция нагревается от t_2 до t_1':

$$cM\,\Delta t = cm\,(t_1 - \Delta t - t_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{M} = \frac{\Delta t}{D_0 - \Delta t} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

В горячем сосуде теперь $M + m = \frac{4}{3}M$ воды при $t_1' = 40\,^\circ\text{C}$, в холодном — $M - m = \frac{2}{3}M$ при $10\,^\circ\text{C}$.



Массы и температуры в сосудах после первого и второго переливаний первой пары.

2. Обратное переливание. Порция m при $40\,^\circ\text{C}$ попадает в $\frac{2}{3}M$ воды при $10\,^\circ\text{C}$. Тепловой баланс для этой смеси (температура смеси θ):

$$c\,\tfrac{2}{3}M\,(\theta - 10) = c\,\tfrac{1}{3}M\,(40 - \theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{2\cdot 10 + 1\cdot 40}{3} = 20\,^\circ\text{C}.$$

После первой пары: в обоих сосудах снова по M, температуры 40 и $20\,^\circ\text{C}$, разность $D_1 = 20\,^\circ\text{C} = D_0/2$.

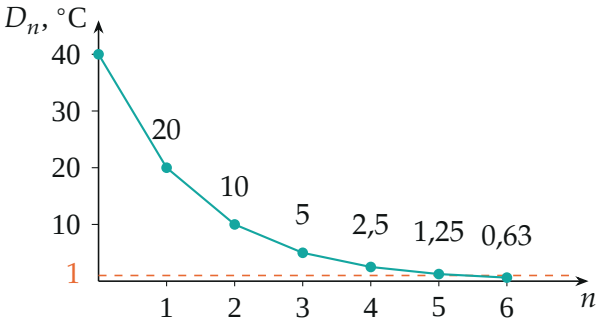
3. Одна пара в общем виде. Пусть перед парой разность D. Шаг «туда»: горячая вода (M) смешивается с порцией ($\frac{1}{3}M$), её температура падает на долю $\frac{m}{M+m} = \frac{1}{4}$ от разности: на $\frac{D}{4}$. Шаг «сюда»: в холодную ($\frac{2}{3}M$) приходит порция с температурой, превышающей холодную на $D - \frac{D}{4} = \frac{3D}{4}$, и холодная нагревается на долю $\frac{m}{M} = \frac{1}{3}$ от этого превы-

шения: на $\frac{D}{4}$. Итог пары:

$$D' = D - \frac{D}{4} - \frac{D}{4} = \frac{D}{2}.$$

Множитель $\frac{1}{2}$ не зависит от самих температур, потому что уравнение баланса линейно по температурам: важны только доли масс, а они повторяются от пары к паре. Значит,

$$D_n = \frac{D_0}{2^n} = \frac{40\,^\circ\mathrm{C}}{2^n}.$$

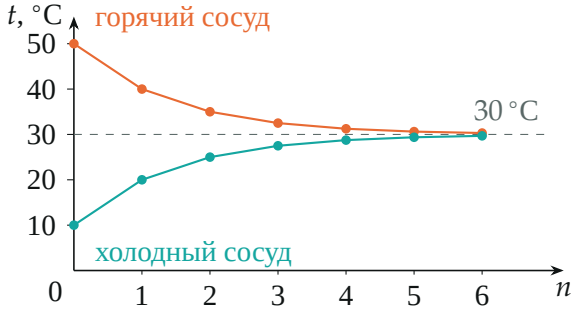


Разность температур после n пар переливаний: каждый раз вдвое меньше. Ниже 1 °C (пунктир) она опускается только на шестой паре.

4. Подбор n**.** Нужно $D_n < 1\,^\circ\mathrm{C}$, т. е. $2^n > 40$:

$$D_5 = \frac{40}{32} = 1{,}25\,^\circ\mathrm{C} > 1\,^\circ\mathrm{C}, \qquad D_6 = \frac{40}{64} \approx 0{,}63\,^\circ\mathrm{C} < 1\,^\circ\mathrm{C}.$$

Пяти пар мало, шести достаточно.



Температуры в сосудах после каждой пары: обе сходятся к среднему $30\,^\circ C$ *(массы в конце пары равны).*

Обратите внимание. Порция в обратном переливании попадает не в M, а в $\frac{2}{3}M$ холодной воды — часть её ушла в первый сосуд. Если взять M, получится неверный множитель. Второе: после каждой пары массы снова равны, поэтому средняя температура остаётся $\frac{t_1+t_2}{2} = 30\,^\circ\text{C}$, и обе температуры сходятся к ней симметрично.

Проверка. Энергия: после первой пары $40 + 20 = 60 = 50 + 10$ — сумма температур равных масс сохранилась, тепловой баланс выполнен. Второй способ для множителя: $D' = D\left(1 - \frac{m}{M+m}\right)\left(1 - \frac{m}{M}\right) = D\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{D}{2}$ — то же. Предел: при $m \to 0$ множитель $\to 1$, разность почти не меняется, как и должно быть.

Ответ. Шесть пар переливаний (разность температур станет $40/64 \approx 0{,}63\,^\circ\text{C}$).