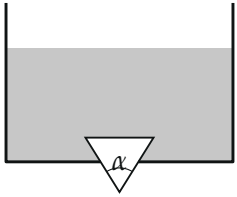
Пробка-конус в отверстии дна

Задача 6. [ИОШ 2017/18, отборочный этап, 9 класс, задача 6] В дне ёмкости для некоторой жидкости есть круглое отверстие радиуса r. Отверстие затыкают пробкой в форме конуса с углом раствора α и радиусом основания R ($R > r$). При какой максимальной плотности материала пробки она всплывёт при наливании в сосуд жидкости? Плотность жидкости ρ_0 считать известной. Указание. Объём конуса определяется формулой: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, где r — радиус основания конуса, h — высота конуса.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равнодействующую сил давления жидкости на тело, которое жидкость обтекает не со всех сторон. Снизу, в отверстии, пробку касается воздух, а не жидкость, поэтому закон Архимеда в виде $\rho_0 g V$ здесь неприменим: силу придётся собрать из давлений. Покажем, что выталкивающая сила зависит от уровня жидкости и максимальна, когда уровень дошёл ровно до основания пробки; пробка всплывёт, если в этот момент выталкивающая сила больше силы тяжести.

Обозначения. H — высота всей пробки, h_0 — высота её части ниже дна (малого конуса в отверстии), $a = H - h_0$ — высота части над дном (усечённого конуса), y — уровень жидкости над дном, ρ — плотность пробки. Атмосферное давление действует со всех сторон (и сверху на жидкость, и снизу на пробку) и в сумме не даёт силы, поэтому дальше считаем только давление жидкости $\rho_0 g z$ на глубине z.

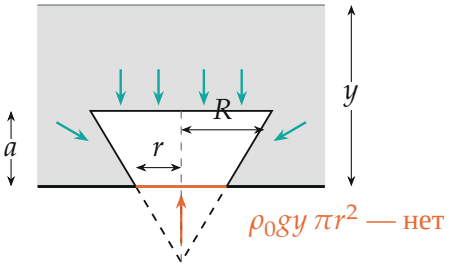
1. Геометрия. Образующая конуса наклонена к оси на $\alpha/2$, поэтому радиус сечения растёт линейно с высотой:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{H}{R} = \frac{h_0}{r} \quad \Rightarrow \quad a = H - h_0 = (R - r)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

2. Сила давления при уровне выше основания ($y \geq a$). Мысленно заменим часть пробки над дном целым усечённым конусом (высота a, радиусы r и R), полностью окружённым жидкостью. На него действует сила Архимеда $\rho_0 g V_{\text{у.к.}}$, равная сумме сил давления на верхнее основание, боковую поверхность и нижнее основание (круг радиуса r на дне). У настоящей пробки верхнее основание и боковая поверхность те же, а нижнего основания нет: под ним продолжение пробки, жидкости там нет. Сила давления на это нижнее основание направлена вверх и равна $\rho_0 g y \cdot \pi r^2$. Вычитаем её:

$$F_A = \rho_0 g V_{\text{у.к.}} - \rho_0 g\, y\, \pi r^2.$$

Чем выше уровень, тем меньше F_A: при большой глубине она становится отрицательной и прижимает пробку ко дну.

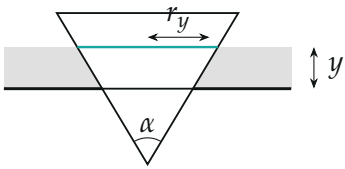


Сравнение с усечённым конусом: давления на верх и бок (бирюза) у пробки те же, а давления снизу на круг радиуса r (морковная стрелка) у пробки нет — там отверстие с воздухом.

3. Уровень ниже основания ($y < a$). Тем же приёмом: в жидкости находится только нижняя часть усечённого конуса высотой y (объём $V_{\text{п.ч.}}(y)$), и

$$F_A = \rho_0 g V_{\text{п.ч.}}(y) - \rho_0 g\, y\, \pi r^2.$$

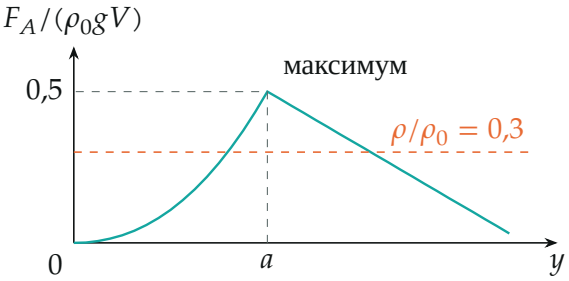
При подъёме уровня на малое Δy первое слагаемое растёт на $\rho_0 g\, \pi r_y^2\, \Delta y$ (r_y — радиус сечения пробки на уровне жидкости), второе — на $\rho_0 g\, \pi r^2\, \Delta y$. Так как $r_y > r$, сила растёт. Выше основания (п. 2) она только убывает. Значит, максимум — при $y = a$, когда жидкость дошла до основания пробки.



Уровень ниже основания пробки: при подъёме жидкости на Δy погружённый объём растёт на $\pi r_y^2 \Delta y$, а «недостающая» сила снизу — лишь на $\pi r^2 \Delta y$.

4. Максимальная выталкивающая сила. Объём усечённого конуса $V_{\text{у.к.}} = \frac{\pi a}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$ (разность объёмов большого и малого конусов). При $y = a$:

$$F_{A\,\max} = \rho_0 g\, \pi a \left[\frac{R^2 + Rr + r^2}{3} - r^2\right] = \frac{\pi}{3}\rho_0 g\, a\,(R - r)(R + 2r) =$$
$$= \frac{\pi}{3}\rho_0 g \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\,(R - r)^2(R + 2r).$$



Выталкивающая сила в долях $\rho_0 g V$ (V — объём пробки) при $r = R/2$, $\operatorname{ctg}(\alpha/2) = 1{,}6$ (координаты — по формулам пп. 2–3). Пробка с $\rho/\rho_0 = 0{,}3$ (пунктир) всплывёт: кривая поднимается выше её веса около $y = a$; при $\rho/\rho_0 > 0{,}5$ — никогда.

5. Условие всплытия. Масса пробки $m = \rho \cdot \frac{\pi}{3}R^2 H = \rho\,\frac{\pi}{3}R^3 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Пробка всплывёт, если наибольшая выталкивающая сила больше силы тяжести, $F_{A\,\max} > mg$:

$$\rho < \rho_0\,\frac{(R - r)^2(R + 2r)}{R^3} = \rho_0\left(1 - 3\frac{r^2}{R^2} + 2\frac{r^3}{R^3}\right).$$

Угол α сократился: и вес, и сила давления пропорциональны высоте пробки.

Обратите внимание. Если сразу налить много жидкости, пробка не всплывёт даже очень лёгкая: при большом y сила прижимает её ко дну. Ответ — про плавное наливание, когда уровень проходит через $y = a$. Второе: формула $\rho_0 g V$ даёт неверный ответ $\rho < \rho_0$ — она предполагает жидкость и под пробкой.

Проверка. Размерность: дробь $(R-r)^2(R+2r)/R^3$ безразмерна. Пределы: $r \to 0$ (отверстия почти нет) — $\rho_{\max} \to \rho_0$, обычное плавание; $r \to R$ (пробка почти проваливается) — $\rho_{\max} \to 0$, над дном почти ничего нет. Численно при $r = R/2$: $1-\frac{3}{4}+\frac{1}{4} = 0{,}5$ — совпадает с максимумом на графике.

Ответ. Пробка всплывёт при $\rho < \rho_{\max} = \rho_0\left(1 - 3\dfrac{r^2}{R^2} + 2\dfrac{r^3}{R^3}\right) = \rho_0\dfrac{(R-r)^2(R+2r)}{R^3}$; от угла α не зависит.