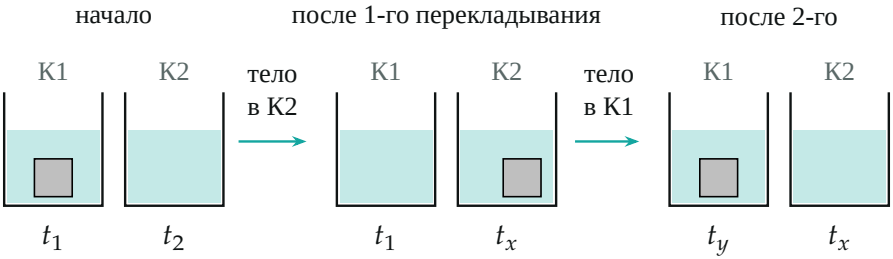
Два калориметра и тело

Задача 1. [ИОШ 2017/18, 11 класс, задача 1] Имеется два одинаковых калориметра, в которые налито одинаковое количество воды: в первый — с температурой $t_1 = 20\,^\circ\text{C}$, во второй — с температурой $t_2 = 100\,^\circ\text{C}$. Кроме того, в первом калориметре находится некоторое тело. Когда тело вытаскивают из первого калориметра и перекладывают во второй, в нём устанавливается температура $t_x = 63\,^\circ\text{C}$. Какая температура установится в первом калориметре, если тело вытащить из второго калориметра и снова опустить в первый? Всеми потерями тепла пренебречь.



Поясняющий рисунок. Серый квадрат — тело. В начале тело в K1, после первого перекладывания — в K2, после второго — снова в K1. K2 после того, как из него вынули тело, остаётся при t_x.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на тепловой баланс без потерь: сколько теплоты отдали горячие тела, столько получили холодные. Тело неизвестное, но нужна одна его характеристика — теплоёмкость, точнее, её отношение к теплоёмкости калориметра. Первое перекладывание (в нём известны обе начальные температуры и результат t_x) даёт это отношение, второе перекладывание даёт ответ.

Обозначения. C — теплоёмкость калориметра вместе с водой, но без тела; она одна и та же у обоих калориметров (калориметры одинаковые, воды налито поровну). C_0 — теплоёмкость тела. t_y — искомая температура. Считаем, что в начале тело в первом калориметре находится в тепловом равновесии с водой, то есть его температура t_1; теплоёмкости от температуры не зависят.

Качественная картина. Во втором перекладывании тело, нагретое до t_x, встречается с водой при t_1 и отдаёт ей часть тепла. Поэтому t_y окажется между t_1 и t_x: больше 20 °C и меньше 63 °C.

1. Первое перекладывание: отношение теплоёмкостей. Система «второй калориметр + тело» теплоизолирована. Её части приходят к одной температуре t_x: второй калориметр остывает со t_2 до t_x, тело нагревается с t_1 до t_x. Закон сохранения энергии (уравнение теплового баланса): теплота, отданная вторым калориметром, равна теплоте, полученной телом,

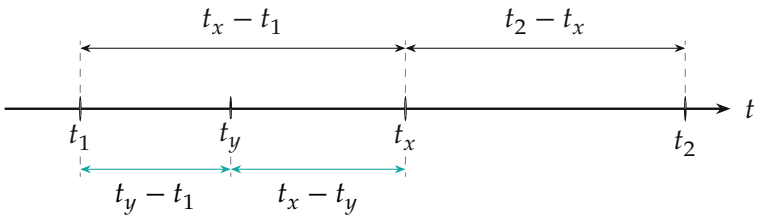
$$C\,(t_2 - t_x) = C_0\,(t_x - t_1) \qquad \Rightarrow \qquad r \equiv \frac{C_0}{C} = \frac{t_2 - t_x}{t_x - t_1} = \frac{37}{43} \approx 0{,}86.$$

2. Второе перекладывание. Теперь тело вынимают из второго калориметра, где оно пришло в равновесие с водой при t_x, и опускают в первый, где вода всё ещё при t_1 (после первого перекладывания первый калориметр не менялся). Обратите внимание: температура тела в этот момент t_x, а не t_2 и не t_1. Тело остывает до t_y, первый калориметр нагревается с t_1 до t_y. Уравнение теплового баланса для системы «первый калориметр + тело»:

$$C_0\,(t_x - t_y) = C\,(t_y - t_1) \qquad \Rightarrow \qquad t_y = \frac{C_0 t_x + C t_1}{C_0 + C} = \frac{r\,t_x + t_1}{r + 1}.$$

Из пункта 1 следует $1 + r = \dfrac{t_2 - t_1}{t_x - t_1}$, поэтому $\dfrac{r}{1+r} = \dfrac{t_2 - t_x}{t_2 - t_1}$ и

$$t_y = t_1 + (t_x - t_1)\frac{r}{1+r} = t_1 + \frac{(t_2 - t_x)(t_x - t_1)}{t_2 - t_1}$$
$$= 20 + \frac{37 \cdot 43}{80} = 39{,}8875\,^\circ\text{C} \approx 39{,}9\,^\circ\text{C}.$$

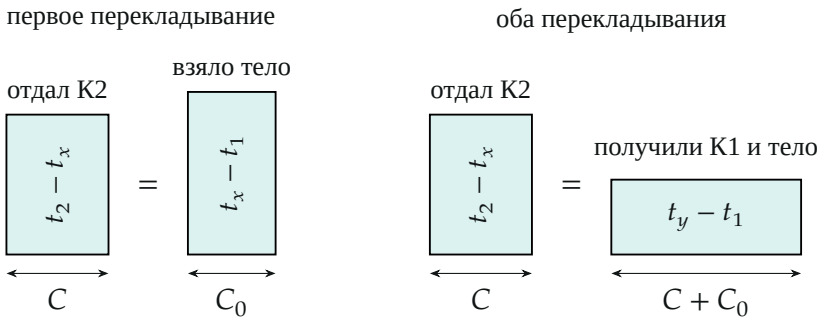


Ось температур в масштабе. Сверху (первое перекладывание): t_x делит отрезок t_1–t_2 в отношении $43 : 37$, и $C \cdot 37 = C_0 \cdot 43$. Снизу (второе): t_y делит отрезок t_1–t_x в отношении $19{,}9 : 23{,}1$, и $C \cdot 19{,}9 = C_0 \cdot 23{,}1$. Это правило рычага.

3. Тот же результат вторым способом: сразу конечное состояние. Сравним начало и конец всего процесса. В начале: К1 с телом при t_1, К2 при t_2. В конце: снова К1 с телом (при t_y) и К2 без тела (при t_x). Содержимое калориметров то же, изменились только температуры. К2 остыл со t_2 до t_x и отдал $C(t_2 - t_x)$. К1 вместе с телом (теплоёмкость $C + C_0$) нагрелся с t_1 до t_y и получил $(C + C_0)(t_y - t_1)$. Потерь нет, значит

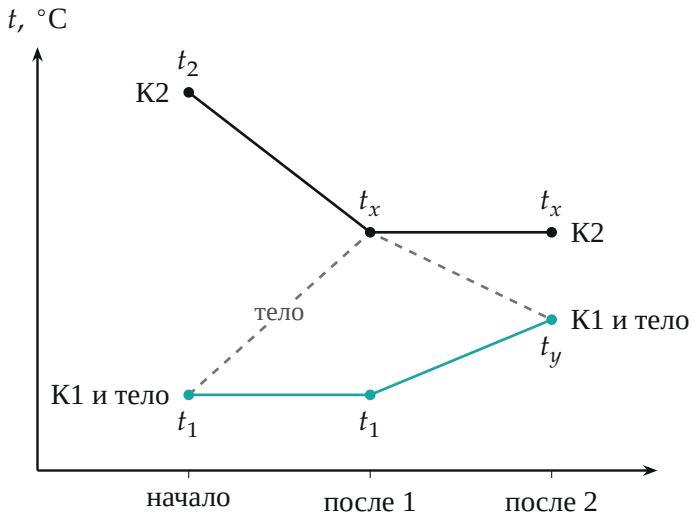
$$C\,(t_2 - t_x) = (C + C_0)\,(t_y - t_1) \quad \Rightarrow \quad t_y = t_1 + \frac{t_2 - t_x}{1 + C_0/C} = t_1 + \frac{t_2 - t_x}{1 + r},$$

и после подстановки $1 + r$ из пункта 1 получаем ту же формулу. Здесь температура тела в промежуточном состоянии вообще не понадобилась.



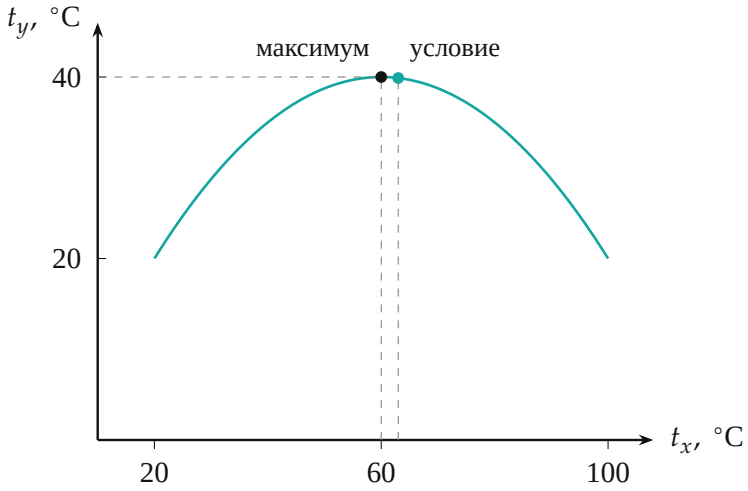
Теплота — площадь: ширина — теплоёмкость, высота — изменение температуры. Слева — пункт 1, справа — пункт 3; $r = 37/43$, $t_y = 39{,}9\,^\circ C$.

Как температуры менялись по ходу дела. Температуры K1, K2 и тела в трёх состояниях показаны на графике: тело всегда принимает температуру того калориметра, в котором лежит.



Температуры по ходу опыта. Чёрная линия — K2, бирюзовая — K1, штриховая — тело. В «начале» и «после 2» тело лежит в K1, «после 1» — в K2.

Зависимость ответа от t_x. Формула пункта 2 показывает, как итоговая температура зависит от результата первого опыта t_x (при тех же t_1, t_2). Это парабола с ветвями вниз; наибольшее значение достигается при $t_x = (t_1 + t_2)/2 = 60\,^\circ\text{C}$ и равно $t_1 + (t_2 - t_1)/4 = 40\,^\circ\text{C}$. Наша точка $t_x = 63\,^\circ\text{C}$ лежит рядом с вершиной, поэтому $t_y = 39{,}9\,^\circ\text{C}$ почти не отличается от максимума.



Зависимость $t_y(t_x)$ при $t_1 = 20\,°C$, $t_2 = 100\,°C$. Чёрная точка — вершина параболы, бирюзовая — условие задачи.

Проверка. Размерность: r безразмерно, t_y получено из температур, то есть в градусах. Крайние случаи: если тела нет ($C_0 \to 0$), то после первого перекладывания $t_x = t_2$, и по формуле $t_y = t_1 + 0 = t_1$: первый калориметр не нагрелся, как и должно быть. Если тело огромное ($C_0 \to \infty$), то $t_x \to t_1$ и снова $t_y = t_1$: огромное тело почти не меняет температуру и не греет К1. Оба способа (пункты 2 и 3) дают 39,8875 °C; прямой расчёт на python с $C = 1$, $C_0 = 37/43$ даёт те же $t_x = 63$ и $t_y = 39{,}9$.

Смысл: после первого перекладывания тело «запомнило» температуру t_x и отдало бы в К1 не всё тепло, а лишь долю $C_0/(C_0 + C)$ разности $t_x - t_1$.

Ответ. $t_y = t_1 + \dfrac{(t_2 - t_x)(t_x - t_1)}{t_2 - t_1} \approx 39{,}9\,°C.$