Мокрый асфальт на жаре

Задача 2. [ИОШ 2017/18, 11 класс, задача 2] Летом в жаркий день (часто в степи или пустыне) можно наблюдать такое явление, когда асфальт дороги становится как будто мокрым, при том, что никакого дождя нет (см. фото). Объясните этот эффект, учитывая, что показатель преломления воздуха убывает с ростом температуры по закону $n(T) = 1 + 0{,}000292\,\dfrac{T_0}{T}$ ($T_0 = 273$ K). Оцените расстояние, на котором человеку асфальт дороги будет казаться мокрым. Температура асфальта может достигать 60 °C. Необходимые для оценки величины выберите, исходя из знаний, опыта и здравого смысла.



▲ **Решение. Что происходит.** Это мираж: свет изгибается в воздухе, показатель преломления которого меняется с высотой. Над раскалённым асфальтом воздух горячее, чем выше, а у горячего воздуха n меньше. Луч от неба, идущий вниз под большим углом к вертикали (почти горизонтально), на спуске попадает во всё менее «плотные» слои и ложится на горизонталь. Если угол достаточно велик, луч не доходит до асфальта, а разворачивается вверх, как при полном внутреннем отражении, и попадает в глаз. Глаз продолжает луч по прямой и видит небо там, где лежит асфальт, — то есть блестящую «лужу». Главная идея: в слоистой

среде вдоль луча постоянно $n\sin\alpha$, поэтому условие разворота зависит только от показателей у глаза и у асфальта. Класс задачи: преломление в неоднородной среде и оценка по порядку величины.

Обозначения. Ось z направлена вверх от поверхности асфальта; воздух зависит только от высоты (слои горизонтальны). α — угол луча с вертикалью, то есть с нормалью к слоям. h — высота глаза над асфальтом, $n_0 = n(T_{\text{возд}})$ — показатель воздуха на уровне глаза, $n_{\text{асф}} = n(T_{\text{асф}})$ — у самой поверхности. Величины выбираем по здравому смыслу, как просит условие: $T_{\text{возд}} = 30\,^\circ\text{C} = 303$ K, $T_{\text{асф}} = 60\,^\circ\text{C} = 333$ K, $h = 2$ м (рост человека). Считаем, что температура убывает с высотой монотонно, а горячий слой тонкий: много тоньше h.

1. Где n больше, где меньше. По формуле условия $n - 1 = 0{,}000292\,T_0/T$ убывает с ростом T (график ниже). У асфальта воздух горячее, там n меньше, а с высотой n растёт ($n_{\text{асф}} < n_0$):

$$n_0 = 1 + \frac{0{,}000292 \cdot 273}{303} = 1{,}000263,$$
$$n_{\text{асф}} = 1 + \frac{0{,}000292 \cdot 273}{333} = 1{,}000239.$$

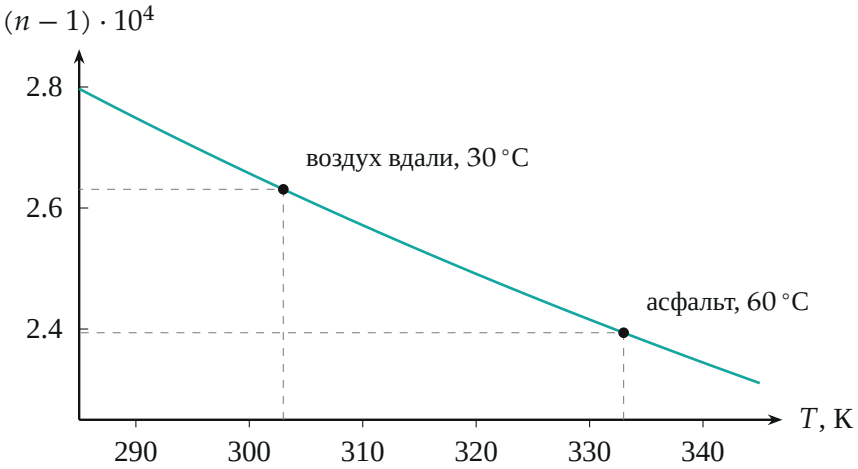


График $n-1$ от T (в 10^{-4}; ось ординат не от нуля): горячий воздух — меньшее n.

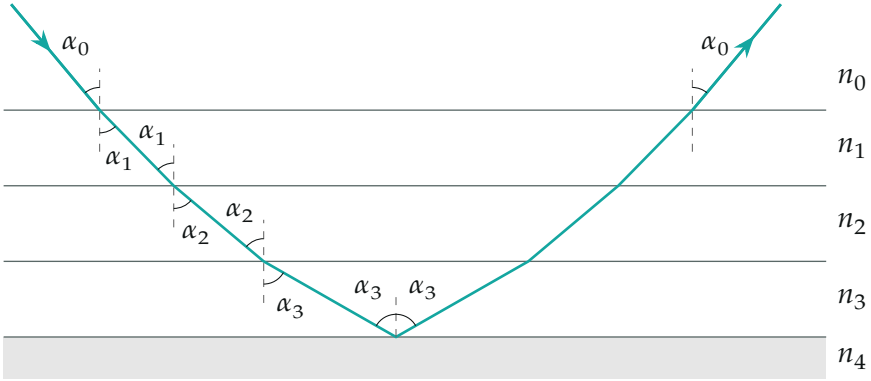
2. Закон преломления в слоях. Разобьём воздух на тонкие горизонтальные слои, показатель каждого считаем постоянным ($n_0 > n_1 > n_2 > \ldots$ по мере спуска к асфальту), и проследим луч, идущий вниз под углом α_0 к вертикали. На каждой границе слоёв k и $k+1$ — закон преломления:

$$n_0 \sin\alpha_0 = n_1 \sin\alpha_1, \qquad n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2, \qquad \ldots$$

Правая часть каждого равенства — левая часть следующего, поэтому вдоль всего луча

$$n \sin\alpha = n_0 \sin\alpha_0 = \text{const}.$$

Показатели промежуточных слоёв сократились: важны только n_0 и показатель того слоя, который нас интересует. Так как вниз n убывает, $\sin\alpha$ растёт: луч идёт из более плотной среды в менее плотную, отклоняется от нормали и всё сильнее ложится на горизонталь.



Ход луча в четырёх слоях и его отражение. Горизонтальные линии — границы слоёв, пунктир — нормаль к ним. Показатели условные: $n_0 = 1{,}00$, $n_1 = 0{,}92$, $n_2 = 0{,}84$, $n_3 = 0{,}74$, $n_4 = 0{,}62$ *(самый нижний, серый слой — у асфальта);* $\alpha_0 = 40°$, *углы* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *вычислены из* $n\sin\alpha = \text{const}$: $44{,}3°$, $49{,}9°$, $60{,}3°$. *В слое* n_4 *было бы* $\sin\alpha_4 > 1$, *поэтому луч в него не входит и идёт назад под тем же* α_0.

3. Условие разворота луча. Пусть вниз по лучу $\sin\alpha$ растёт. Луч разворачивается там, где $\alpha = 90°$, то есть $n = n_0 \sin\alpha_0$. Слой с таким показателем должен существовать над асфальтом, то есть среди значений n

от $n_{\text{асф}}$ до n_0: иначе луч дойдёт до самого асфальта и не вернётся. Условие разворота (полного отражения):

$$n_0 \sin\alpha_0 \geqslant n_{\text{асф}} \quad \Longleftrightarrow \quad \sin\alpha_0 \geqslant \frac{n_{\text{асф}}}{n_0} \equiv \sin\alpha_{\text{кр}}.$$

После разворота луч идёт вверх и выходит на уровень глаза под тем же углом α_0 (ход луча обратим и симметричен: $n\sin\alpha$ по-прежнему равно $n_0\sin\alpha_0$). Подсчитаем: $\sin\alpha_{\text{кр}} = 1{,}000239/1{,}000263 = 0{,}999976$, то есть $\alpha_{\text{кр}} \approx 89{,}6°$: развернуться могут лишь лучи, идущие почти горизонтально.

Обратите внимание на знак неравенства: развернуться могут лучи с *большими* углами к вертикали. Крутые лучи ($\alpha_0 < \alpha_{\text{кр}}$) доходят до асфальта: для них $n_0\sin\alpha_0 < n_{\text{асф}}$, и угол 90° не достигается ни в одном слое.

4. Где человек видит «мокрый» асфальт. Глаз видит предмет в том направлении, откуда луч входит в глаз. На уровне глаза воздух однороден, луч прямой и составляет с вертикалью угол α_0. Продолжим его назад по прямой: он упрётся в асфальт на расстоянии $l = h\,\mathrm{tg}\,\alpha_0$ от человека (горячий слой тонкий, поэтому изгиб у самой земли на l почти не влияет). Лучи с $\alpha_0 \geqslant \alpha_{\text{кр}}$ приходят от неба и создают видимость блестящей поверхности; лучи с $\alpha_0 < \alpha_{\text{кр}}$ идут от самого асфальта. Значит, «лужа» видна на расстоянии не меньше (рисунок — после пункта 5)

$$l_{\min} = h\,\mathrm{tg}\,\alpha_{\text{кр}} = h\,\frac{\sin\alpha_{\text{кр}}}{\cos\alpha_{\text{кр}}} = h\,\frac{n_{\text{асф}}}{\sqrt{n_0^2 - n_{\text{асф}}^2}}.$$

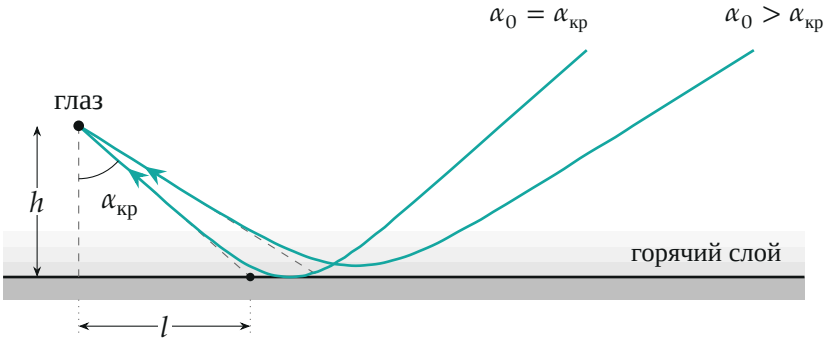
5. Подстановка чисел. Разность показателей и их сумма:

$$n_0 - n_{\text{асф}} = 0{,}000292\cdot 273\left(\frac{1}{303} - \frac{1}{333}\right) = 2{,}37\cdot 10^{-5}, \quad n_0 + n_{\text{асф}} \approx 2{,}0005.$$

Поэтому

$$\sqrt{n_0^2 - n_{\text{асф}}^2} = \sqrt{2{,}37 \cdot 10^{-5} \cdot 2{,}0005} = 6{,}89 \cdot 10^{-3},$$
$$\operatorname{tg}\alpha_{\text{кр}} = \frac{1{,}00024}{6{,}89 \cdot 10^{-3}} \approx 145,$$
$$l_{\min} = 145 \cdot 2 \text{ м} \approx 2{,}9 \cdot 10^2 \text{ м} \approx 300 \text{ м}.$$

Асфальт на расстоянии $l \gtrsim 3 \cdot 10^2$ м и дальше кажется мокрым; ближе человек видит сам асфальт.

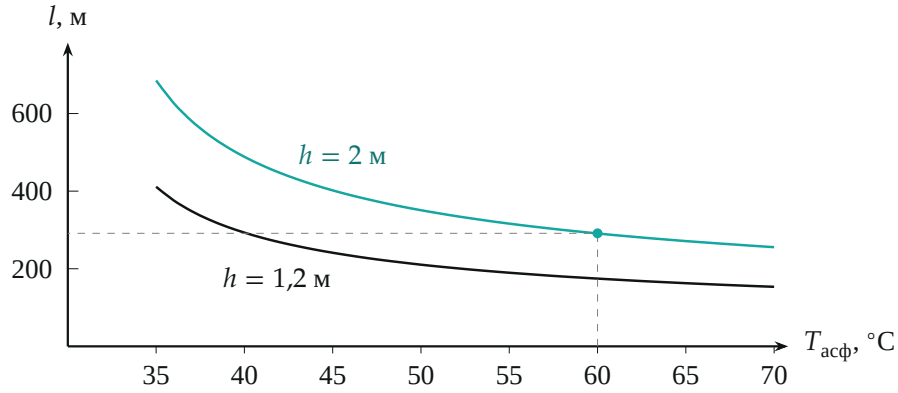


Два луча от неба, пришедшие в глаз, и их продолжения по прямой (пунктир), которыми видит глаз. Для критического луча продолжение упирается в асфальт на расстоянии $l = h \operatorname{tg}\alpha_{кр}$; дальше этой точки асфальт кажется зеркальным. Рисунок схематичный: толщина горячего слоя и разность показателей сильно увеличены, чтобы кривизна была видна; кривые вычислены из $n \sin\alpha = const$ для $n(z) = 1 - 0{,}25\, e^{-z/0{,}3}$, $h = 2$.

Второй способ — приближение $n \approx 1$**.** Все n отличаются от единицы на $2{,}6 \cdot 10^{-4}$, поэтому $\alpha_{\text{кр}}$ очень близок к 90° и $\operatorname{tg}\alpha_{\text{кр}} \approx 1/\cos\alpha_{\text{кр}}$, где $\cos\alpha_{\text{кр}} = \sqrt{1 - (n_{\text{асф}}/n_0)^2} \approx \sqrt{2(n_0 - n_{\text{асф}})}$. Тогда

$$l_{\min} \approx \frac{h}{\sqrt{2\,(n_0 - n_{\text{асф}})}} = \frac{2}{\sqrt{4{,}74 \cdot 10^{-5}}} = 290 \text{ м}.$$

Отсюда видно, что $l \propto h$ и $l \propto 1/\sqrt{n_0 - n_{\text{асф}}}$, а разность показателей пропорциональна перепаду температур.



Расстояние $l_{\min}$ от температуры асфальта при $T_{возд} = 30\,°C$: бирюзовая кривая — $h = 2$ м, чёрная — $h = 1{,}2$ м. Точка — условие задачи: $60\,°C$, $l_{\min} = 291$ м.

Проверка. Размерность: l — это h, умноженное на безразмерный $\operatorname{tg}\alpha_{\text{кр}}$, то есть метры. Предел: если асфальт не нагрет ($T_{\text{асф}} \to T_{\text{возд}}$), то $n_{\text{асф}} \to n_0$, $\alpha_{\text{кр}} \to 90°$ и $l_{\min} \to \infty$: мираж не возникает, как и должно быть. Оба способа дали 290 м. Чувствительность (график): водителю с высотой глаз 1,2 м «лужа» видна с 175 м, а при $T_{\text{асф}} = 50\,°C$ и $h = 2$ м — с 350 м; сотни метров согласуются с обычными наблюдениями.

Смысл: n у асфальта лишь на $2{,}4 \cdot 10^{-5}$ меньше, чем у глаза, и критический угол отличается от 90° на 0,4°. Поэтому зеркалом работает только асфальт, который виден под очень малым углом к горизонту, то есть далеко.

Ответ. Свет от неба разворачивается в горячем слое (полное отражение при $\sin\alpha_0 \geqslant n_{\text{асф}}/n_0$), и глаз видит «лужу». Асфальт кажется мокрым на расстоянии $l \gtrsim h\,n_{\text{асф}}/\sqrt{n_0^2 - n_{\text{асф}}^2} \approx 3 \cdot 10^2$ м (при $h = 2$ м, $30\,°C$ у глаза, $60\,°C$ у асфальта).