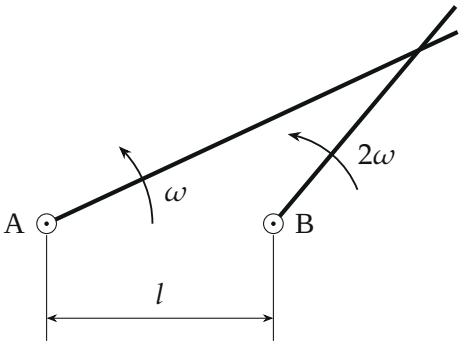
Пересечение двух вращающихся стержней

Задача 3. [ИОШ 2017/18, 11 класс, задача 3] Два очень длинных стержня вращаются с постоянными угловыми скоростями ω и 2ω вокруг параллельных осей, проходящих через их концы A и B (см. рисунок). Расстояние между осями l, в начальный момент оба стержня направлены направо. По какой траектории движется точка пересечения стержней? Найти скорость и ускорение этой точки через время $t = \pi/6\omega$ после начала движения. Ответ обосновать.



▲ **Решение. Что происходит.** Пересечение двух вращающихся лучей — точка, которая бежит по плоскости. Неожиданно её путь оказывается окружностью: правый стержень вращается вдвое быстрее левого, и в треугольнике из двух осей и точки пересечения два угла всегда равны, поэтому одна из сторон остаётся равной l. Класс задачи: кинематика — траектория находится геометрией, а скорость и ускорение — из равномерного движения по окружности. Вторым способом траекторию проверим в координатах.

Обозначения. A — ось левого стержня, B — правого, O — точка пересечения стержней. Оба стержня вращаются против часовой стрелки (так на рисунке), от направления вправо: к моменту t левый повернулся на угол ωt, правый — на $2\omega t$. Пока $0 < \omega t < \pi/2$ стержни пересекаются над отрезком AB; о других моментах — в пункте 4.

Качественная картина. В начале стержни лежат на одной прямой, поэтому точка пересечения определена лишь в пределе: при малом t

стержни почти параллельны, и пересечение далеко, на расстоянии около $2l$ от A (в l справа от B). Правый стержень вращается быстрее и уходит вверх от левого. Когда левый стержень повернётся на $\pi/2$, правый повернётся на π и пойдёт по BA налево: пересечение придёт в точку A. Значит, траектория соединяет точку на расстоянии $2l$ от A с самой точкой A.

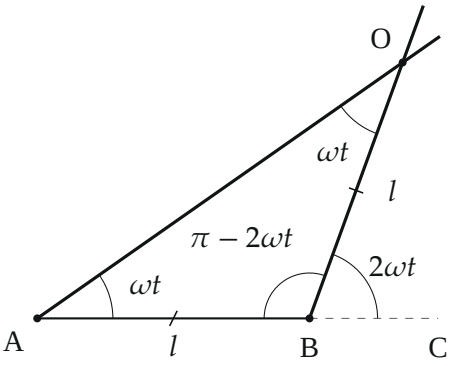
1. Треугольник AOB. Пусть C — точка на продолжении AB за B. Угол OBC равен углу поворота правого стержня, $\angle OBC = 2\omega t$. Угол при вершине A равен углу поворота левого стержня, $\angle OAB = \omega t$. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним:

$$\angle OBC = \angle OAB + \angle AOB \quad \Rightarrow \quad \angle AOB = 2\omega t - \omega t = \omega t.$$

Углы при вершинах A и O равны: $\angle OAB = \angle AOB = \omega t$, значит, треугольник равнобедренный, и равны стороны, лежащие против этих углов:

$$BO = BA = l \qquad \text{в любой момент } 0 < \omega t < \pi/2.$$

Проверим по углам: внутренний угол при B равен $\pi - 2\omega t$ (смежный с $2\omega t$), сумма углов $\omega t + (\pi - 2\omega t) + \omega t = \pi$.



Углы при $\omega t = 35°$: $\angle OAB = \omega t$, внешний угол при B равен $2\omega t$, поэтому $\angle AOB = \omega t$ и $BO = BA = l$.

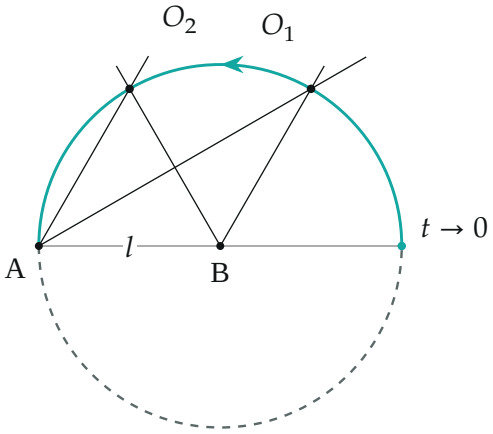
2. Траектория. Расстояние от B до O всё время равно l, значит, точка O лежит на окружности радиуса l с центром в B. Её положение на этой

окружности задаёт направление BO. Но O лежит на правом стержне, и BO — это сам правый стержень, повёрнутый на $2\omega t$ от направления вправо. Поэтому точка пересечения движется по окружности с центром B и радиусом l равномерно, с угловой скоростью 2ω, против часовой стрелки. При $0 < \omega t < \pi/2$ полярный угол точки $2\omega t$ меняется от 0 до π: это верхняя полуокружность от точки $(l, 0)$ относительно B до точки A.

Второй способ — координаты. Поместим A в начало, B в точку $(l, 0)$ и обозначим $\varphi = \omega t$. Левый стержень — прямая $y = x \operatorname{tg} \varphi$, правый — прямая $y = (x - l) \operatorname{tg} 2\varphi$. Приравняем y и выразим x через $\tau = \operatorname{tg} \varphi$, учитывая $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2\tau}{1 - \tau^2}$:

$$x = \frac{l \operatorname{tg} 2\varphi}{\operatorname{tg} 2\varphi - \operatorname{tg} \varphi} = \frac{2l}{1 + \tau^2} = 2l \cos^2 \varphi = l\,(1 + \cos 2\varphi),$$
$$y = x\tau = l \sin 2\varphi.$$

Следовательно, $x - l = l \cos 2\omega t$ и $y = l \sin 2\omega t$: окружность радиуса l с центром $(l, 0)$, то есть в точке B, и точка на ней повёрнута на $2\omega t$. Тот же результат.



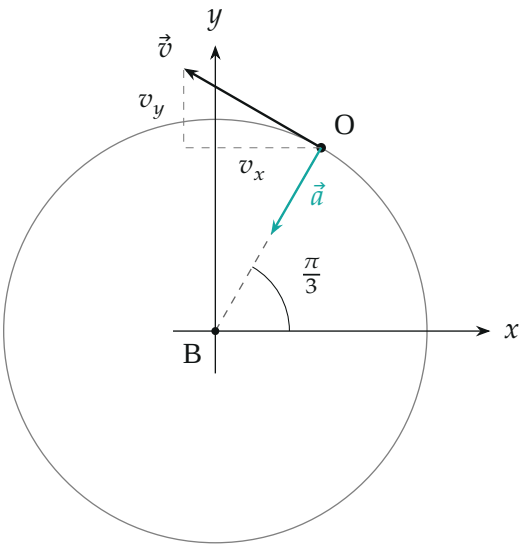
Траектория точки пересечения. Бирюзовая полуокружность: $0 < \omega t < \pi/2$; O_1, O_2 — положения при $\omega t = 30°$ и $60°$ (тонкие линии — стержни в эти моменты). Серая штриховая: $3\pi/2 < \omega t < 2\pi$, пересечение под AB.

3. Скорость и ускорение. Точка движется по окружности радиуса l равномерно с угловой скоростью 2ω. Скорость постоянна по модулю и направлена по касательной, то есть перпендикулярно BO, против часовой стрелки:

$$v = 2\omega \cdot l = 2\omega l.$$

Ускорение центростремительное (модуль скорости не меняется, касательного ускорения нет) и направлено к центру B вдоль OB:

$$a = \frac{v^2}{l} = (2\omega)^2 l = 4\omega^2 l.$$



Момент $t = \pi/6\omega$: $\vec{v}$ — по касательной (150° к оси x), $\vec{a}$ — к центру B; $v_x = -\sqrt{3}\,\omega l$, $v_y = \omega l$. Длины векторов условные.

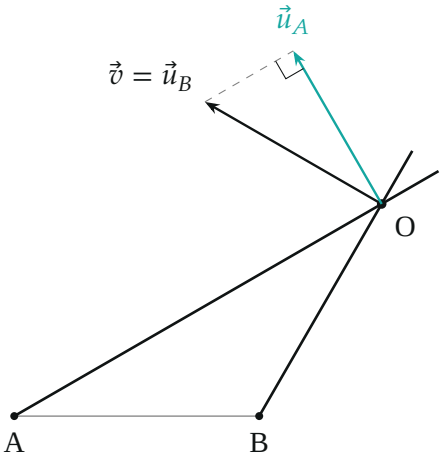
К моменту $t = \pi/6\omega$ левый стержень повернулся на $\omega t = \pi/6 < \pi/2$, правый — на $2\omega t = \pi/3$: стержни пересекаются, решение применимо. Радиус BO составляет с направлением AB угол 60°. Скорость $\vec{v}$ перпендикулярна BO и направлена против часовой стрелки: под углом

150° к оси x (вдоль AB). В проекциях на оси (x — от A к B, y — вверх):

$$\vec{v} = 2\omega l\,(-\sin 60^\circ,\ \cos 60^\circ) = \omega l\,(-\sqrt{3},\ 1),$$
$$\vec{a} = -4\omega^2 l\,(\cos 60^\circ,\ \sin 60^\circ) = -2\omega^2 l\,(1,\ \sqrt{3}).$$

Тот же результат дают производные координат из второго способа: $\dot{x} = -2\omega l \sin 2\omega t$, $\dot{y} = 2\omega l \cos 2\omega t$, $\ddot{x} = -4\omega^2 l \cos 2\omega t$, $\ddot{y} = -4\omega^2 l \sin 2\omega t$.

Ещё одна проверка скорости — через стержни. Точка O лежит на обоих стержнях. Поперёк стержня её скорость равна скорости точки стержня, то есть для левого $u_A = \omega \cdot AO$, для правого $u_B = 2\omega \cdot BO = 2\omega l$ (вдоль стержня точка может скользить, и это не меняет её положения на стержне). Из равнобедренного треугольника $AO = 2l\cos\omega t$ (основание, $\omega t = \pi/6$): $AO = \sqrt{3}\,l$, $u_A = \sqrt{3}\,\omega l$. Скорость $\vec{v}$ точки O — вектор, у которого проекция на нормаль к левому стержню равна u_A, а на нормаль к правому — u_B. Нормаль к правому стержню — касательная к окружности, поэтому $\vec{v}$ направлена вдоль неё, $v = u_B = 2\omega l$, а проекция на нормаль к левому стержню (угол между нормалями $\omega t = 30^\circ$) равна $2\omega l \cos 30^\circ = \sqrt{3}\,\omega l = u_A$: сошлось.



При $\omega t = 30^\circ$: $\vec{u}_B$ ($2\omega l$) — по касательной к окружности, $\vec{u}_A$ ($\sqrt{3}\,\omega l$) — перпендикулярно левому стержню. Проекция $\vec{v}$ на $\vec{u}_A$ равна u_A.

4. Остальное время. При $\pi/2 < \omega t < \pi$ левый стержень направлен вверх-влево, а правый ($\pi < 2\omega t < 2\pi$) — вниз: лучи не пересекаются. При $\pi < \omega t < 3\pi/2$ левый направлен вниз-влево, а правый ($2\pi < 2\omega t < 3\pi$) — вверх: пересечения снова нет. При $3\pi/2 < \omega t < 2\pi$ левый стержень идёт вниз-вправо, а правый ($3\pi < 2\omega t < 4\pi$) — вниз (поворачиваясь от направления влево к направлению вправо), и пересечение лежит под AB. Те же формулы $x - l = l\cos 2\omega t$, $y = l\sin 2\omega t$ дают тогда нижнюю полуокружность, скорость и ускорение те же. При $t = 2\pi/\omega$ оба стержня снова направлены вправо, и движение повторяется. Половину периода точка существует, половину — нет; когда стержни не пересекаются, вопрос о её скорости не имеет смысла.

Проверка. Размерность: $v = 2\omega l$ — $\text{с}^{-1}\cdot\text{м} = \text{м/с}$; $a = 4\omega^2 l$ — м/с^2. Предельные точки: при $t \to 0$ получаем $O = B + l(1, 0)$, то есть $AO = 2l$, как и должно быть для почти параллельных стержней; при $\omega t = \pi/2$ получаем $O = A$ и $AO = 2l\cos\omega t = 0$. Скорость найдена тремя способами: центростремительным законом, производной координат и через стержни.

Смысл: правый стержень вдвое быстрее левого — ровно так, что точка пересечения «держится» на расстоянии l от оси правого.

Ответ. Точка пересечения движется по окружности радиуса l с центром в точке B (при $0 < \omega t < \pi/2$ — по верхней полуокружности, при $3\pi/2 < \omega t < 2\pi$ — по нижней; в остальное время стержни не пересекаются) равномерно, с угловой скоростью 2ω. Скорость $v = 2\omega l$ направлена по касательной (в момент $t = \pi/6\omega$ — под 150° к оси AB), ускорение $a = 4\omega^2 l$ направлено к центру B (вдоль OB).