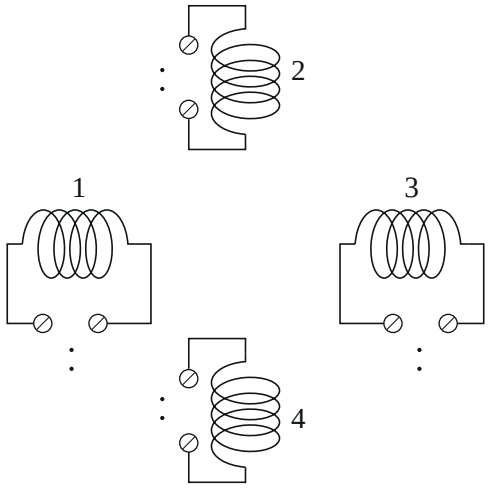
Вращающееся поле четырёх соленоидов

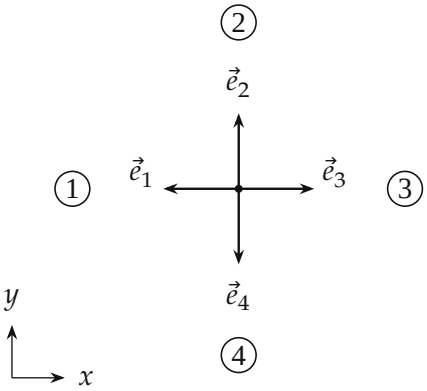
Задача 4. [ИОШ 2017/18, 11 класс, задача 4] Электродвигатели переменного тока были предложены в конце 19 века Н. Тесла и Г. Феррарисом. Их идея состояла в том, чтобы с помощью переменных токов создать вращающееся магнитное поле, которое заставит вращаться магнит. Для создания такого поля они брали несколько соленоидов, пропускали через них переменные токи одинаковой частоты, но со сдвигом фазы. Рассмотрите систему четырёх соленоидов, показанную на рисунке. Пусть в первом соленоиде течёт ток $I_1 = A\cos\omega t$. С какими фазовыми сдвигами ($I_i = I_0\cos(\omega t + \varphi_i)$, $i = 2, 3, 4$) должны течь токи во втором, третьем и четвёртом соленоидах, чтобы в области между ними было вращающееся магнитное поле? С какой угловой скоростью оно будет вращаться? Соленоиды намотаны так, что при одинаковых фазах тока поле всех соленоидов направлено одновременно либо из центра, либо к центру системы соленоидов.



▲ **Решение. Что происходит.** Магнитное поле в области между соленоидами — векторная сумма полей четырёх соленоидов, и каждое поле направлено вдоль оси своего соленоида и меняется во времени так же, как ток. Оси соленоидов 1 и 3 горизонтальны, 2 и 4 — вертикальны, поэтому суммарный вектор $\vec{B}$ удобно разложить на две проекции:

горизонтальную и вертикальную. Вектор постоянной длины вращается равномерно, если его проекции — косинус и синус одного и того же угла $\omega t + \theta$: $B_x = B\cos(\omega t + \theta)$, $B_y = \pm B\sin(\omega t + \theta)$. Значит, задача сводится к подбору фаз токов так, чтобы проекции были косинусом и синусом: они должны колебаться с одинаковой амплитудой и со сдвигом на четверть периода. Это принцип двухфазного двигателя Теслы — Феррариса; идём от результата.

Обозначения. Начало координат — в центре системы, ось x вправо (вдоль соленоидов 1 и 3), ось y вверх (вдоль 2 и 4). Единичные векторы $\vec{e}_k$ направлены от центра к соленоиду k: $\vec{e}_1 = (-1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$, $\vec{e}_3 = (1, 0)$, $\vec{e}_4 = (0, -1)$. Соленоиды одинаковы и расположены симметрично, поэтому поле соленоида k в области между ними пропорционально его току: $\vec{B}_k = \beta I_k \vec{e}_k$ с одним и тем же $\beta > 0$; знак выбран по условию: при одинаковых положительных токах поле каждого направлено из центра, то есть вдоль $\vec{e}_k$. Амплитуды токов считаем равными, $I_0 = A$, и обозначаем $B_0 = \beta A$ — амплитуду поля одного соленоида в центре (при разных амплитудах конец вектора описывал бы эллипс, и вращение было бы неравномерным). Фазы считаем от I_1: $\varphi_1 = 0$.



Единичные векторы $\vec{e}_k$ от центра к соленоидам. При $I_k > 0$ поле $\vec{B}_k$ направлено вдоль $\vec{e}_k$ (из центра), при $I_k < 0$ — против (к центру).

Качественная картина. Вдоль оси x работают только соленоиды 1 и 3, и их поля в центре направлены противоположно: первый тянет поле

влево, третий — вправо. Чтобы эти поля не гасили друг друга, а складывались, токи должны идти в противофазе. То же верно для пары 2 и 4 по оси y. Остаётся сдвинуть пары друг относительно друга на четверть периода.

1. Проекции поля. По принципу суперпозиции $\vec{B} = \sum \vec{B}_k$. Проецируем на оси:

$$B_x = \beta\,(I_3 - I_1), \qquad B_y = \beta\,(I_2 - I_4).$$

Минусы стоят у I_1 и I_4, потому что $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_4$ направлены против осей.

2. Горизонтальная проекция. С $I_k = A\cos(\omega t + \varphi_k)$:

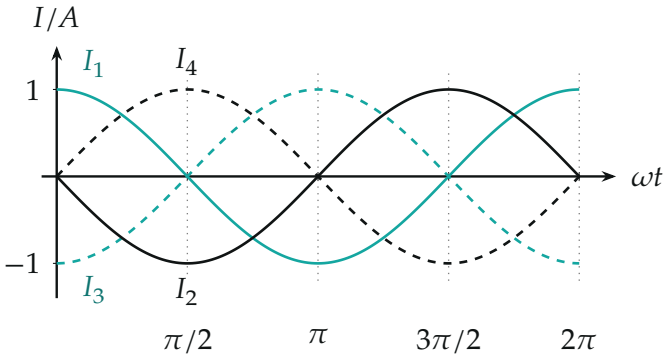
$$B_x = B_0[\cos(\omega t + \varphi_3) - \cos\omega t] = -2B_0 \sin\Big(\omega t + \frac{\varphi_3}{2}\Big) \sin\frac{\varphi_3}{2}.$$

Амплитуда $2B_0|\sin\frac{\varphi_3}{2}|$ наибольшая при $\varphi_3 = \pi$: поля пары складываются полностью, $B_x = -2B_0\cos\omega t$. Выбираем $\varphi_3 = \pi$ — это единственный сдвиг, при котором поле пары вдвое больше поля одного соленоида.

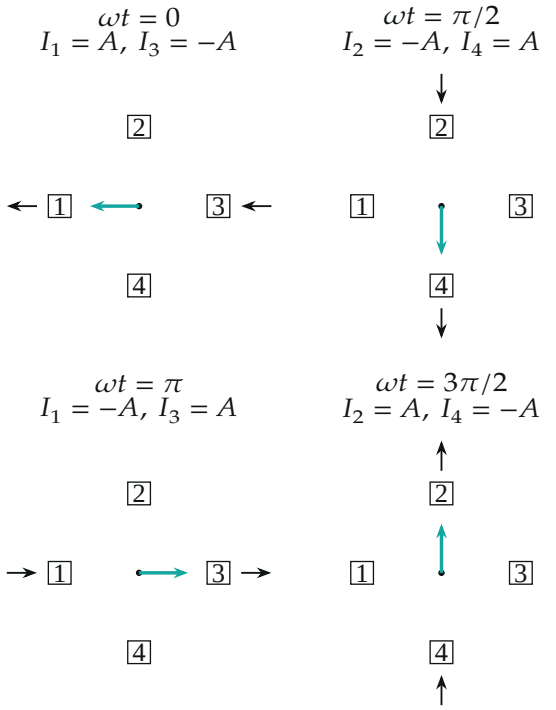
3. Вертикальная проекция. Тем же рассуждением берём токи пары в противофазе: $\varphi_4 = \varphi_2 + \pi$. Тогда $I_4 = -I_2$ и $B_y = 2B_0\cos(\omega t + \varphi_2)$. Нужен синус при том же ωt: $\cos(\omega t + \varphi_2) = \pm\sin\omega t$, то есть $\varphi_2 = \pi/2$ (тогда $\cos(\omega t + \pi/2) = -\sin\omega t$) или $\varphi_2 = 3\pi/2$. Берём $\varphi_2 = \pi/2$, тогда $\varphi_4 = 3\pi/2$ и

$$B_y = -2B_0\sin\omega t.$$

4. Что получилось. Вектор $\vec{B} = -2B_0\,(\cos\omega t,\, \sin\omega t) = 2B_0\,(\cos(\omega t + \pi),\, \sin(\omega t + \pi))$ имеет постоянную длину $2B_0$, а его полярный угол $\omega t + \pi$ растёт со временем линейно: вектор вращается равномерно с угловой скоростью ω, против часовой стрелки. Проверим по моментам, глядя на рисунок: при $\omega t = 0$ токи $(A, 0, -A, 0)$ — поля первого и третьего соленоидов оба направлены налево; при $\omega t = \pi/2$ токи $(0, -A, 0, A)$ — поля второго и четвёртого направлены вниз; затем направо и вверх.



Токи за период. I_1 и I_3 (бирюзовые) — в противофазе, I_2 и I_4 (чёрные) — тоже; I_2 опережает I_1 по фазе на $\pi/2$. Пунктирные вертикали — моменты $\omega t = \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ следующего рисунка, ось ординат — $\omega t = 0$.



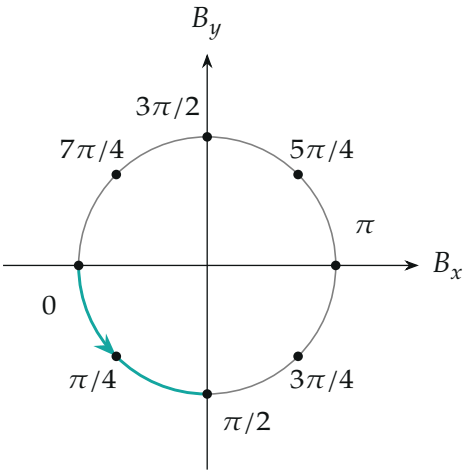
Четыре момента. Стрелки у соленоидов — направления их полей (наружу при $I_k > 0$, к центру при $I_k < 0$); бирюзовая стрелка — суммарное поле: влево, вниз, вправо, вверх.

Второй способ — комплексные амплитуды. Ток $I_k = A\cos(\omega t+\varphi_k)$ — вещественная часть вращающегося вектора $Ae^{i(\omega t+\varphi_k)}$ на плоскости. Проекции записываются так:

$$B_x = B_0\,\mathrm{Re}[e^{i\omega t}\,(e^{i\varphi_3}-1)], \qquad B_y = B_0\,\mathrm{Re}[e^{i\omega t}\,(e^{i\varphi_2}-e^{i\varphi_4})].$$

Вектор $\vec{B}$ вращается равномерно по кругу, когда комплексные амплитуды $a_x = e^{i\varphi_3}-1$ и $a_y = e^{i\varphi_2}-e^{i\varphi_4}$ связаны условием $a_y = \pm i\,a_x$ (равные модули, поворот на 90°). При $\varphi_3 = \pi$ имеем $a_x = -2$, и условию удовлетворяет $a_y = 2i$, то есть $e^{i\varphi_2}-e^{i\varphi_4} = i-(-i)$, откуда $\varphi_2 = \pi/2$, $\varphi_4 = 3\pi/2$. Тот же набор. Если взять $a_y = -2i$, то есть поменять местами φ_2 и φ_4, вращение пойдёт в другую сторону.

Замечание о неоднозначности. Условие $a_y = \pm i\,a_x$ выполняется и при других сдвигах: например, $\varphi_3 = \pi/2$, $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_4 = \pi/2$ тоже даёт круг, но его радиус $\sqrt{2}\,B_0$ меньше $2B_0$. Ответ, в котором поля пар складываются полностью ($\varphi_3 = \pi$), — самый сильный и естественный; он и принят.



Конец вектора $\vec{B}$ за период: окружность радиуса $2B_0$; точки подписаны значением ωt. Старт — слева, в точке $(-2B_0,\,0)$, движение против часовой стрелки.

Проверка. Размерность: $B_0 = \beta A$ — индукция поля одного соленоида, $|\vec{B}| = 2B_0$ — индукция в тех же единицах. Модуль: $B_x^2 + B_y^2 = 4B_0^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = 4B_0^2$ — постоянен, как нужно для равномерного вращения. Крайние случаи: при $\varphi_3 = 0$ (токи 1 и 3 синфазны) поля горизонтальных соленоидов гасят друг друга, $B_x \equiv 0$, и поле лишь колеблется по вертикали, а не вращается — поэтому именно $\varphi_3 = \pi$. Если токи 2 и 4 в одной фазе, гаснет B_y. Прямой расчёт на python (подстановка $\varphi_2 = \pi/2$, $\varphi_3 = \pi$, $\varphi_4 = 3\pi/2$) даёт $|\vec{B}| = 2B_0$ и полярный угол $\pi + \omega t$ при всех ωt.

Смысл: два перпендикулярных переменных поля одинаковой амплитуды, сдвинутых на четверть периода, складываются во вращающееся — как два перпендикулярных гармонических колебания, дающих движение по окружности.

Ответ. $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi_3 = \pi$, $\varphi_4 = \dfrac{3\pi}{2}$ (при $I_0 = A$); поле имеет постоянный модуль $2B_0$ и вращается с угловой скоростью ω. Для расположения на рисунке (соленоид 2 сверху, 4 снизу) — против часовой стрелки; поменяв местами токи 2 и 4 ($\varphi_2 = 3\pi/2$, $\varphi_4 = \pi/2$), получим вращение в обратную сторону. В ответе организаторов направление названо «по часовой»; для рисунка и этих фаз это ошибка (проверено по четырём моментам выше): по часовой стрелке поле вращается, только если обменять фазы токов 2 и 4.