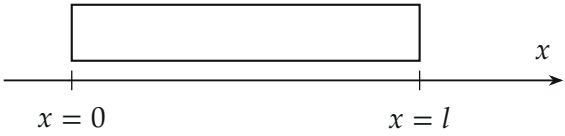
Тепловой поток по стержню с боковой потерей

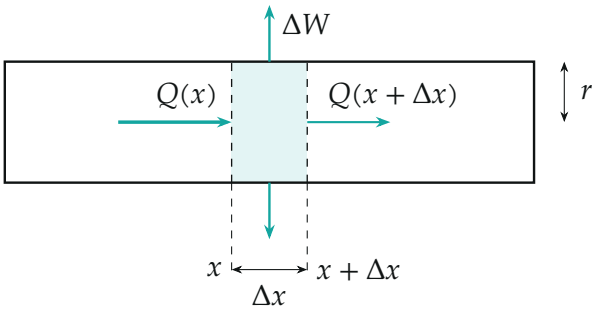
Задача 5. [ИОШ 2017/18, 11 класс, задача 5] По круглому стержню длиной l и радиуса r распространяется постоянный (т.е. не зависящий от времени) тепловой поток. Распределение температуры вдоль стержня определяется соотношением $T(x) = T_1 + T_2\,(x-l)^2$, где x — координата поперечного сечения стержня; одному концу стержня отвечает координата $x = 0$, второму — $x = l$ (см. рис.). Какое количество теплоты уходит в окружающую среду через боковые стенки между точками $x = l/2$ и $x = 3l/4$? Указание. Количество тепла q, переносимого в единицу времени через единицу площади тонкого слоя толщиной Δx, одна поверхность которого имеет температуру t_1, вторая — температуру t_2, определяется законом: $q = \lambda\,(t_2 - t_1)/\Delta x$, где λ — коэффициент теплопроводности (закон Фурье).



▲ **Решение. Что происходит.** Тепло течёт по стержню от горячего конца к холодному, то есть вправо. Будь стержень теплоизолирован с боков, поток был бы одинаков во всех сечениях, а температура менялась бы по линейному закону. У нас $T(x)$ — парабола, градиент температуры вдоль стержня меняется, значит, слева в слой входит больше тепла, чем справа выходит. Разность и уходит в окружающую среду через боковую поверхность. Главная идея: тепло, ушедшее вбок из тонкого слоя, равно убыли потока вдоль слоя, то есть пропорционально второй производной T''. Класс задачи: стационарная теплопроводность с боковой потерей.

Обозначения. $S = \pi r^2$ — площадь сечения, $Q(x)$ — тепловой поток (количество теплоты в единицу времени) через сечение x в сторону возрастания x, W — искомое количество теплоты в единицу времени через боковую поверхность между $l/2$ и $3l/4$. Считаем стержень тонким (температура по сечению однородна и зависит только от x), λ постоянным, режим стационарным: температуры не меняются, поэтому энергия слоя

не накапливается. По условию $T_2(x-l)^2$ — температура, значит, T_2 измеряется в К/м^2 (замечание об этом — в конце).



Узкий слой стержня $[x,\ x+\Delta x]$. Слева входит поток $Q(x)$, справа выходит меньший поток $Q(x+\Delta x)$; разность ΔW уходит через боковую поверхность $\Delta S = 2\pi r\,\Delta x$ (две стрелки — верх и низ боковой поверхности).

1. Поток через сечение. Закон Фурье для тонкого слоя между сечениями x и $x+\Delta x$: на единицу площади переносится $q = \lambda\,|T(x+\Delta x) - T(x)|/\Delta x$ — от горячей стороны к холодной. У нас $T'(x) = 2T_2(x-l) < 0$ при $x < l$: температура убывает вдоль x, значит, тепло идёт вправо, и через сечение площадью S

$$Q(x) = -\lambda S\,T'(x) = 2\lambda S\,T_2\,(l-x) > 0.$$

Поток вправо убывает по мере приближения к холодному концу: на левом конце он $2\lambda S T_2\,l$, на правом — нуль.

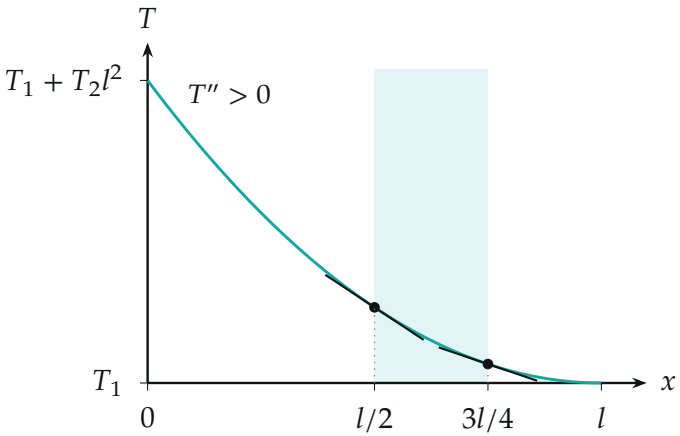
2. Потеря вбок из тонкого слоя. Рассмотрим слой между x и $x+\Delta x$ (рисунок). Режим стационарный, поэтому энергия слоя не растёт: приходящий поток равен уходящему вправо плюс уходящему вбок. Закон сохранения энергии для слоя:

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q(x+\Delta x) + \Delta W, \\ \Delta W &= Q(x) - Q(x+\Delta x) = -Q'(x)\,\Delta x = \lambda S\,T''(x)\,\Delta x. \end{aligned}$$

Вторая производная $T'' = 2T_2$ не зависит от x, поэтому

$$\Delta W = 2\lambda S\,T_2\,\Delta x = 2\pi r^2 \lambda T_2\,\Delta x.$$

Через единицу площади боковой поверхности $\Delta S = 2\pi r\,\Delta x$ за единицу времени уходит $w = \Delta W/\Delta S = \lambda r\,T_2$ — тоже постоянная величина.



Температура вдоль стержня (парабола с вершиной в $x = l$, $T'' = 2T_2 > 0$). Тонкие линии — касательные в точках $x = l/2$ и $x = 3l/4$: справа наклон меньше по модулю, поэтому поток тепла $-\lambda S T'$ вправо убывает. Заштрихован участок задачи.

3. Суммируем по участку. Участок от $l/2$ до $3l/4$ разобьём на тонкие слои. Каждый теряет одно и то же $2\pi r^2\lambda T_2$ на единицу длины, поэтому полная потеря — это произведение на длину участка $3l/4 - l/2 = l/4$:

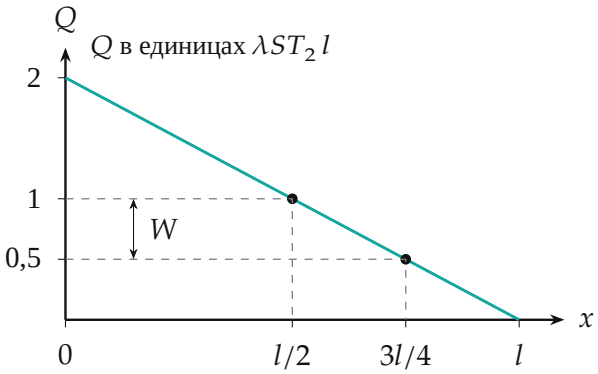
$$W = 2\pi r^2\lambda T_2 \cdot \frac{l}{4} = \frac{\pi r^2\lambda T_2\, l}{2}.$$

То же получается как $W = w\,S_1$ с площадью боковой поверхности участка $S_1 = 2\pi r \cdot l/4$: $W = \lambda r T_2 \cdot \pi r l/2$.

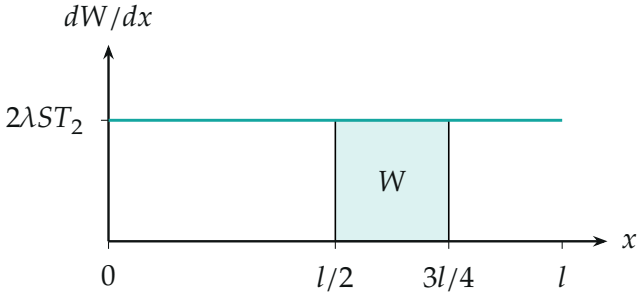
Второй способ — разность потоков. Тепло, ушедшее вбок на всём участке, равно разности потоков, входящего через левое сечение участка и выходящего через правое:

$$W = Q\Big(\frac{l}{2}\Big) - Q\Big(\frac{3l}{4}\Big) = 2\lambda S T_2 \cdot \frac{l}{2} - 2\lambda S T_2 \cdot \frac{l}{4} = \lambda S T_2\,\frac{l}{2} = \frac{\pi r^2\lambda T_2\, l}{2}.$$

Результат тот же.



Поток $Q(x) = 2\lambda S T_2 (l - x)$ убывает линейно до нуля. Потеря вбок на участке — убыль потока: $W = Q(l/2) - Q(3l/4) = \lambda S T_2 l\,(1 - 0{,}5)$.



Потеря вбок на единицу длины $dW/dx = 2\lambda S T_2$ не зависит от x; W — площадь заштрихованного прямоугольника ($2\lambda S T_2 \cdot l/4$).

Замечание о форме условия и ответе организаторов. Для условия $T = T_1 + T_2 (x - l)^2$ величина T_2 имеет размерность К/м^2, и получается $W = \pi r^2 \lambda T_2\, l/2$. Ответ организаторов $W = \pi r^2 \lambda T_2 / (2l)$ верен, если T_2 — температура, а профиль записан через безразмерную координату: $T = T_1 + T_2\,(x - l)^2/l^2$ (в их решении так и написано: $w = \lambda r T_2 / l^2$). Замена $T_2 \to T_2/l^2$ в нашем ответе даёт в точности ответ организаторов: это один и тот же результат при разных смыслах буквы T_2.

Проверка. Размерность: $[\lambda]$ = Вт/(м·К), $[r^2]$ = м^2, $[T_2]$ = К/м^2, $[l]$ = м; произведение даёт Вт — мощность, как и нужно. Знак: $W > 0$ при $T_2 > 0$: поток вправо убывает, тепло действительно уходит из

стержня. Предел: при $T_2 \to 0$ профиль $T = T_1$ — градиента нет, потока нет, $W \to 0$. Если бы $T(x)$ была линейной, $T'' = 0$ и боковых потерь не было бы — так работает теплоизолированный стержень. Численная проверка на python (конечные разности для Q) дала $W = \pi r^2 \lambda T_2 l/2$ с точностью 10^{-8}.

Смысл: кривизна температурного профиля показывает, сколько тепла теряется в стороны; чем сильнее профиль выгнут, тем быстрее убывает поток вдоль стержня.

Ответ. $W = \dfrac{\pi r^2 \lambda T_2\, l}{2}$ при $T = T_1 + T_2(x-l)^2$ (T_2 в К/м^2); если T_2 — температура и профиль $T = T_1 + T_2(x-l)^2/l^2$, то $W = \dfrac{\pi r^2 \lambda T_2}{2l}$ (ответ организаторов).