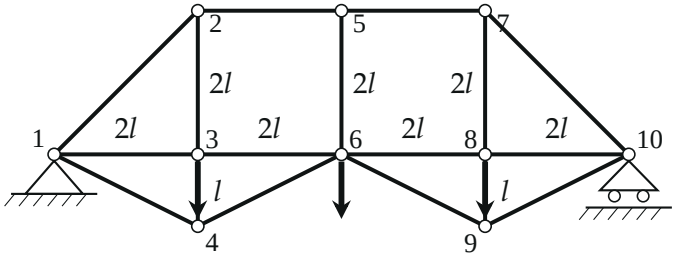
# Мостовая ферма

**Задача 6.** [ИОШ 2017/18, 11 класс, задача 6] Для замены опасных деформаций изгиба деформациями растяжения-сжатия и облегчения веса большепролётных конструкций пролёты мостов часто делают из относительно лёгких металлических стержней, соединённых системой шарниров. Такая конструкция называется строительной фермой (от латинского firmus — прочный). Имеется мостовая ферма пешеходного моста, слева опирающаяся на неподвижный шарнир, справа — на шарнирно-подвижную опору. В узлах 3, 4, 8 к ферме приложены сосредоточенные силы $F_1 = F_2 = F_3 = 20$ кН. Найти силы натяжения стержней 6-9 и 7-10. Весом самой фермы пренебречь. Геометрические параметры фермы даны на рисунке, $l = 1$ м.



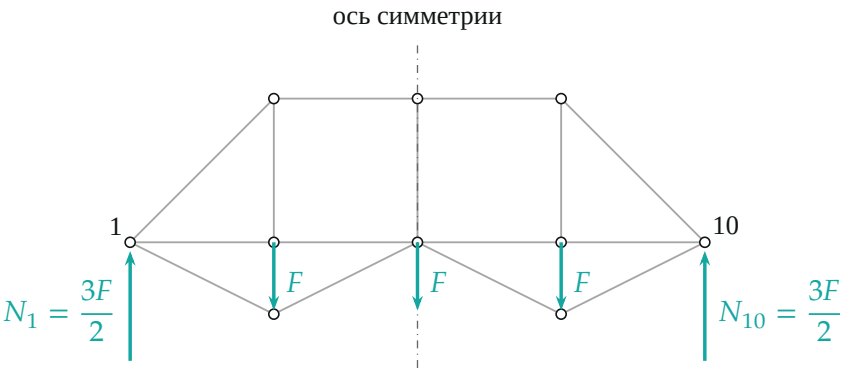

▲ **Решение. Что происходит.** Ферма — шарнирно соединённые лёгкие стержни. На такой стержень действуют только две силы, приложенные в шарнирах на его концах, поэтому сила направлена вдоль стержня: стержень либо растянут (сила натяжения положительна), либо сжат (отрицательна). Реакции опор находятся из равновесия всей фермы, а усилия в нужных стержнях — мысленным рассечением (метод сечений): берём часть фермы, в которую входят только три неизвестных усилия, и записываем для неё равновесие. Стержень 7-10 — из равновесия шарнира 10.

**Обозначения.** $F = 20$ кН, $l = 1$ м. Ось $x$ — вправо, $y$ — вверх, начало в шарнире 1; все силы в стержнях $F_{i\text{-}j}$ считаем положительными при растяжении, поэтому отрицательное значение означает сжатие. Узлы (в единицах $l$): $1(0;0), 2(2;2), 3(2;0), 4(2;-1), 5(4;2), 6(4;0), 7(6;2),$

$8(6;0)$, $9(6;-1)$, $10(8;0)$. В узлах 3 и 8 в сторону узлов 4 и 9 идут вертикальные стержни 3-4 и 8-9. Нагрузка: в тексте условия названы узлы 3, 4, 8, а на рисунке стрелки нарисованы у узлов 3, 6 и 8 — силы $F$, вертикальные, вниз. Берём рисунок: нагрузка симметрична относительно вертикали через узел 6, и именно так считает решение организаторов (реакции $3F/2$). Перенос силы с узла 3 на узел 4 вдоль вертикального стержня 3-4 на искомые усилия не влияет, так что «3» и «4» в тексте — это одна и та же сила, а в тексте пропущен узел 6. Если всё же понимать текст буквально (две силы на стержне 3-4 и одна в узле 8, в узле 6 нагрузки нет), реакции станут $7F/4$ и $5F/4$, а ответы — $|F_{6\text{-}9}| = \sqrt{5}F/4 \approx 11{,}2$ кН и $|F_{7\text{-}10}| = 3\sqrt{2}F/2 \approx 42{,}4$ кН.

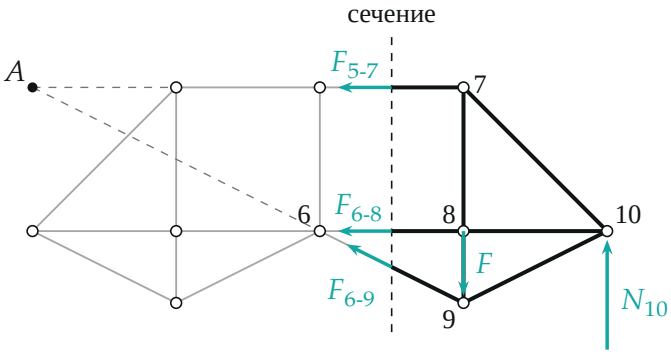
**Качественная картина.** Ферма работает как балка: нижний пояс (стержни 1-3-6-8-10) растягивается, верхний (2-5-7) сжимается, раскосы, идущие от опор, сжаты. Нагрузка симметрична, поэтому симметричны и опорные реакции, и усилия в симметричных стержнях.

**1. Реакции опор.** Все внешние силы вертикальны, а подвижная опора 10 даёт только вертикальную реакцию, поэтому горизонтальная реакция шарнира 1 равна нулю. Сумма проекций сил на вертикаль для всей фермы: $N_1 + N_{10} = 3F$. Нагрузка симметрична (точки приложения $x = 2l,\ 4l,\ 6l$ расположены симметрично относительно $x = 4l$), значит, $N_1 = N_{10} = \dfrac{3F}{2}$. Проверка моментами относительно шарнира 1: $N_{10} \cdot 8l = F\,(2l + 4l + 6l) = 12Fl$, то есть $N_{10} = \dfrac{3F}{2}$.



*Ферма целиком: нагрузки $F$ и реакции опор $N_1 = N_{10} = 3F/2$. Штрих-пунктир — ось симметрии.*

**2. Рассечение.** Рассечём ферму по стержням 5-7, 6-8 и 6-9 вертикальной плоскостью справа от узла 6 (рисунок) и рассмотрим правую часть — узлы 7, 8, 9, 10 и стержни между ними. Эта часть в равновесии под действием внешних сил $F$ (в узле 8), $N_{10}$ и трёх неизвестных сил со стороны отброшенных кусков стержней. Силу каждого куска направляем вдоль стержня от части наружу, то есть как растягивающую: $F_{5\text{-}7}$ и $F_{6\text{-}8}$ — влево, $F_{6\text{-}9}$ — вдоль стержня вверх-влево, в направлении узла 6 (составляющие $-2/\sqrt{5}$ и $+1/\sqrt{5}$ от модуля, так как tg угла стержня 6-9 с горизонталью равен $1/2$). Если вычисление даст отрицательное число, стержень сжат.



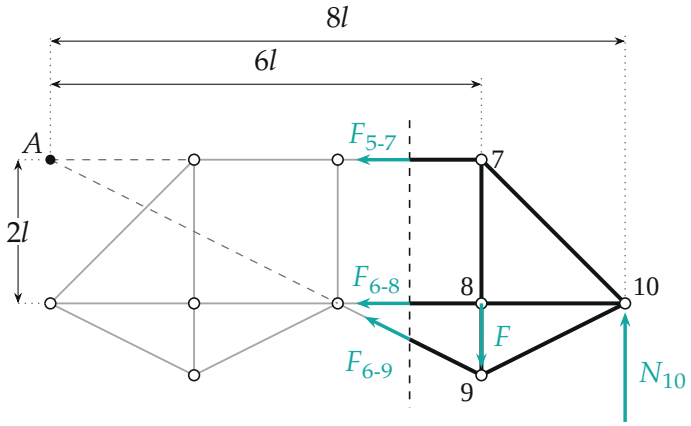

*Сечение справа от узла 6 (левая часть фермы серая). Силы со стороны отброшенных кусков стержней направлены вдоль стержней, как растягивающие. $A$ — точка пересечения линий действия $F_{5\text{-}7}$ и $F_{6\text{-}9}$ (пунктир).*

**3. Момент относительно точки A.** Три неизвестные силы удобнее искать по одной. Линии действия $F_{5\text{-}7}$ (прямая $y = 2l$) и $F_{6\text{-}9}$ (прямая через узлы 6 и 9: $y = 2l - x/2$) пересекаются в точке $A(0;\, 2l)$. Моменты этих двух сил относительно $A$ равны нулю, и условие равенства нулю суммы моментов даёт уравнение с одним неизвестным $F_{6\text{-}8}$. Положительным считаем момент против часовой стрелки. Плечо силы $F_{6\text{-}8}$ (она идёт вдоль $y = 0$) равно $2l$, плечо $F$ (на линии $x = 6l$) равно $6l$, плечо

$N_{10}$ (на линии $x = 8l$) равно $8l$:

$$N_{10} \cdot 8l - F \cdot 6l - F_{6\text{-}8} \cdot 2l = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{6\text{-}8} = \frac{12Fl - 6Fl}{2l} = 3F.$$

Положительное число: стержень 6-8 растянут, как мы и предполагали.

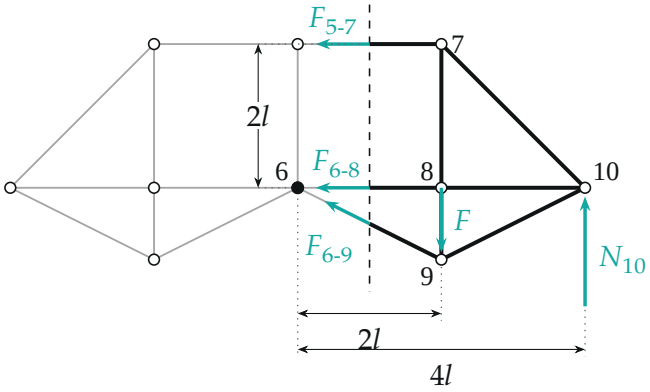



*Моменты относительно A: плечо $F_{6\text{-}8}$ — $2l$, $F$ — $6l$, $N_{10}$ — $8l$; линии действия $F_{5\text{-}7}$ и $F_{6\text{-}9}$ проходят через A (пунктир).*

**4. Момент относительно узла 6.** Теперь выбираем точкой моментов узел 6: через него проходят линии действия $F_{6\text{-}8}$ (вдоль $y = 0$) и $F_{6\text{-}9}$ (вдоль стержня), их моменты равны нулю. Остаётся $F_{5\text{-}7}$ с плечом $2l$ (линия $y = 2l$), сила $F$ с плечом $2l$ (по горизонтали от $x = 4l$ до $x = 6l$) и $N_{10}$ с плечом $4l$:

$$F_{5\text{-}7} \cdot 2l - F \cdot 2l + N_{10} \cdot 4l = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{5\text{-}7} = F - 2N_{10} = -2F.$$

Отрицательное значение: стержень 5-7 сжат.




*Моменты относительно узла 6: плечо $F_{5\text{-}7}$ — $2l$, $F$ — $2l$, $N_{10}$ — $4l$; линии действия $F_{6\text{-}8}$ и $F_{6\text{-}9}$ проходят через узел 6.*

**5. Проекция на горизонталь.** Для правой части $\sum F_x = 0$, причём $F_{5\text{-}7}$ и $F_{6\text{-}8}$ направлены влево, а у $F_{6\text{-}9}$ горизонтальная составляющая равна $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}F_{6\text{-}9}$:

$$-F_{5\text{-}7} - F_{6\text{-}8} - \frac{2}{\sqrt{5}}F_{6\text{-}9} = 0,$$

$$F_{6\text{-}9} = -\frac{\sqrt{5}}{2}\,(F_{5\text{-}7} + F_{6\text{-}8}) = -\frac{\sqrt{5}}{2}\,(-2F + 3F) = -\frac{\sqrt{5}}{2}\,F.$$

Стержень 6-9 сжат, его сила

$$|F_{6\text{-}9}| = \frac{\sqrt{5}}{2}\,F = \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 20\ \text{кН} = 22{,}4\ \text{кН}.$$

Контроль по вертикали: $\dfrac{F_{6\text{-}9}}{\sqrt{5}} + N_{10} - F = -\dfrac{F}{2} + \dfrac{3F}{2} - F = 0.$

**Второй способ для $F_{6\text{-}9}$ — моменты относительно узла 7.** Через узел 7 проходят линия действия $F_{5\text{-}7}$ (прямая $y = 2l$) и линия действия $F$ (вертикаль $x = 6l$): их моменты нулевые. Остаются: $F_{6\text{-}8}$ в точке сечения $(5l;\,0)$ с плечом $2l$ (вдоль $y = 0$, в $2l$ ниже узла 7), $N_{10}$ с плечом $2l$ (по горизонтали от $x = 6l$ до $x = 8l$) и $F_{6\text{-}9}$, у которой в точке сечения

$(5l;\ -l/2)$ плечо равно $6l/\sqrt{5}$ (расстояние от узла 7 до прямой стержня 6-9). Против часовой стрелки:

$$-F_{6\text{-}8}\cdot 2l + N_{10}\cdot 2l - F_{6\text{-}9}\cdot\frac{6l}{\sqrt{5}} = 0,$$

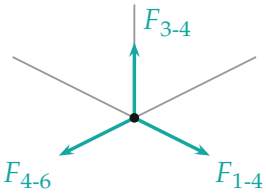
$$F_{6\text{-}9} = \frac{\sqrt{5}}{6}\,(2N_{10} - 2F_{6\text{-}8}) = \frac{\sqrt{5}}{6}\,(3F - 6F) = -\frac{\sqrt{5}}{2}\,F.$$

Тот же результат.

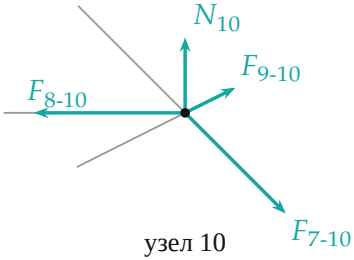
Обратите внимание: у решения организаторов результат записан как 22,3 кН — округлением вниз; точное значение 22,36 кН даёт 22,4 кН.

**6. Стержень 7-10: равновесие шарнира 10.** Симметрия фермы относительно вертикали через узел 6 переводит стержень 4-6 в 9-6, 1-4 в 10-9, 1-2 в 10-7. Из равновесия шарнира 4 найдём связь усилий: у него три стержня, 3-4 вертикален, поэтому сумма горизонтальных проекций даёт $-\frac{2}{\sqrt{5}}F_{1\text{-}4} + \frac{2}{\sqrt{5}}F_{4\text{-}6} = 0$, то есть $F_{1\text{-}4} = F_{4\text{-}6}$. По симметрии $F_{4\text{-}6} = F_{6\text{-}9}$ и $F_{1\text{-}4} = F_{9\text{-}10}$, поэтому

$$F_{9\text{-}10} = F_{1\text{-}4} = F_{4\text{-}6} = F_{6\text{-}9} = -\frac{\sqrt{5}}{2}\,F.$$




узел 4




узел 10

*Силы стержней на шарниры. Слева шарнир 4 (20 кН в 1 см): сжатые 1-4 и 4-6 толкают шарнир вниз, растянутый 3-4 тянет вверх. Справа шарнир 10 (30 кН в 1 см).*

В шарнире 10 сходятся стержни 10-7 (под 45° вверх-влево), 10-9 (вниз-влево, $\operatorname{tg} = 1/2$) и 10-8 (горизонтально влево), и приложена реакция

$N_{10} = 3F/2$ вверх. Вертикальная проекция сил на шарнир 10:

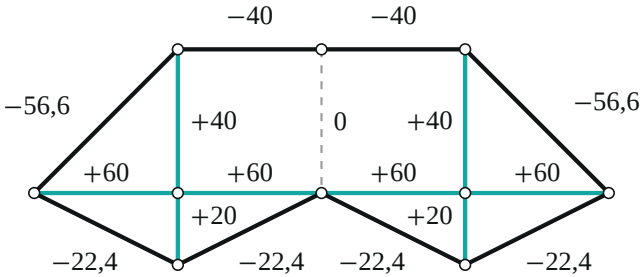
$$N_{10} + \frac{F_{7\text{-}10}}{\sqrt{2}} - \frac{F_{9\text{-}10}}{\sqrt{5}} = 0,$$
$$\frac{3F}{2} + \frac{F_{7\text{-}10}}{\sqrt{2}} + \frac{F}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{7\text{-}10} = -2\sqrt{2}\,F.$$

Стержень 7-10 сжат:

$$|F_{7\text{-}10}| = 2\sqrt{2}\,F = 2\sqrt{2}\cdot 20\ \text{кН} = 56{,}6\ \text{кН}.$$

Контроль: горизонтальная проекция для шарнира 10 даёт $F_{8\text{-}10} = 2F + F = 3F$, а в шарнире 8 (стержни 7-8 и 8-9 вертикальны) $F_{8\text{-}10} = F_{6\text{-}8} = 3F$ — как в пункте 3.

**Карта усилий.** Тот же метод, применённый ко всем шарнирам (и проверенный решением полной системы 20 уравнений на python), даёт усилия во всех 17 стержнях.




*Усилия в стержнях, кН. Бирюзовые стержни растянуты, чёрные сжаты, серый штриховой (5-6) не нагружен.*

**Проверка.** Размерность: сила в стержне — килоньютоны, как и $F$. Равновесие: все три уравнения для правой части выполнены (два момента и две проекции дали согласованное $F_{6\text{-}9}$), а шарниры 10 и 8 дали одно и то же $F_{8\text{-}10} = F_{6\text{-}8} = 3F$. Знаки: нижний пояс растянут, верхний и раскосы у опор сжаты, как и предсказывала качественная картина. Решение полной системы уравнений равновесия всех 10 шарниров на python даёт $F_{6\text{-}9} = -22{,}36$ кН и $F_{7\text{-}10} = -56{,}57$ кН.

Смысл: опорная реакция передаётся в ферму через наклонные стержни у опор (1-2, 1-4, 10-7, 10-9), поэтому они сжаты сильнее всего.

**Ответ.** Стержень 6-9 сжат: $|F_{6\text{-}9}| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}F \approx 22{,}4$ кН; стержень 7-10 сжат: $|F_{7\text{-}10}| = 2\sqrt{2}\,F \approx 56{,}6$ кН (силы натяжения $F_{6\text{-}9} = -22{,}4$ кН и $F_{7\text{-}10} = -56{,}6$ кН).